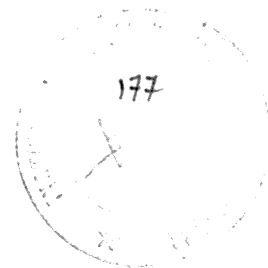


ECOLE D'ETE DE PHYSIQUE DES PARTICULES

GIF-SUR-YVETTE

DEUXIEME SESSION - 7-19 SEPTEMBRE 1970



MATRICES DENSITE DE POLARISATION

Partie du cours sur le spin faite par

M. G. DONCEL \*

Division Physique Théorique  
C. E. R. N.  
1211 - Genève '23, Suisse

L. MICHEL

Institut des Hautes Etudes Scientifiques  
91 - Bures-sur-Yvette, France

P. MINNAERT

Laboratoire de Physique Théorique  
Université de Bordeaux  
33 - Talence, France

\* Adresse actuelle :

Departamento de Fisica Teorica, Facultad de Ciencias  
Barcelone 14, Espagne

Ces notes de cours correspondent à la partie du cours sur le spin, donnée par M. Doncel, L. Michel et P. Minnaert, les 10, 11, 12, 14, 15 septembre 1970, à la deuxième session de l'Ecole d'Eté de Gif-sur-Yvette.

Nous avons distribué aux participants de l'Ecole les deux premiers fascicules (en prêtirage) et quelques parties du fascicule 4 (en préparation) de notre publication :

"POLARIZATION DENSITY MATRIX. How to present its measurement".

Nous avons intégré in-extenso dans les notes du cours tous les textes roneotypés (par le Laboratoire de Physique Théorique de la Faculté des Sciences de Bordeaux) de la partie II "Application to single particle polarization" qui traitent de la mesure de la polarisation d'une particule finale de spin  $1/2$ ,  $1$ ,  $3/2$ , ou  $2$  produite dans une collision à deux corps avec cible et faisceau non-polarisés. Nous y avons aussi ajouté quelques éléments de la partie I. Ces textes sont en anglais. Nous nous excusons auprès de nos lecteurs des références qu'ils contiennent à des équations et à des paragraphes de parties de notre publication n'appartenant pas à ces notes de cours.

La possibilité qui nous fut offerte de faire ce cours nous donna l'occasion de nombreux et fructueux contacts avec des expérimentateurs et quelques théoriciens s'occupant de la polarisation des hadrons. Nous avons participé avec enthousiasme aux discussions qui ont été provoquées par le cours. Nous remercions les organisateurs de l'Ecole d'Eté de Gif et nous les félicitons pour cette deuxième session qui nous semble avoir amplement atteint son but.

TABLE DES MATIERES

	page
- <u>INTRODUCTION</u>	0 -1- à 0 -5-
- <u>PREMIERE PARTIE : LE DOMAINE DES MATRICES DENSITE DE POLARISATION</u>	
Chapitre 1 - <u>Description covariante de la polarisation</u>	
1 - L'espace $\mathcal{K}_{(m,j)}$ des états d'une particule	I. 1 -1-(à 3)
2 - La polarisation d'une particule	I. 1 -3-(à 6)
3 - Matrice densité de polarisation	I. 1 -6-(à 8)
4 - L'espace des observables de polarisation et le domaine de polarisation	I. 1 -8-(à 11)
5 - Covariance relativiste de la polarisation	I. 1 -11-(à 15)
6 - Le domaine des matrices densité observées dans une expérience	I. 1 -15-(à 17)
7 - Remarques sur la présentation des résultats de mesure de polarisation.	I. 1 -18 et 19
Chapitre 2 - <u>Paramétrisation de la matrice densité, paramètres multipolaires</u>	
Appendice 1 - Tenseur métrique de l'espace Symboles $-3j$ et $-6j$ .	I. A1-1-(à 4) I. A1-5-(à 8)
Introduction	I. 2 -1-
1 - Les éléments de matrice densité	I. 2 -2-(à 5)
2 - Les paramètres multipolaires	I. 2 -6-(à 16)
3 - Conclusion. Choix des paramètres	I. 2 -17-
Chapitre 3 - <u>Conditions de production</u>	
Introduction	I. 3 -1-
Appendice 2 - The choice of frame, helicity and transversity.	IA2-1-(à 8)

Appendice 3 - Production conditions : B-conditions, rank conditions.	I A3-1- (à 14)
Appendice 4 - Symétries discrètes P. T. C.	I A4-1- (à 13)

Chapitre 4 - Mesure de la polarisation. Distribution  
angulaire de désintégration

Introduction	I. 4 -1-
1 - La distribution angulaire	I. 4 -2-(à 5)
2 - Distribution angulaire et polarisation	I. 4 -6-(à 9)
3 - Mesure de la polarisation dans une désintégration à deux corps $j \rightarrow j_1 + j_2$	I. 4 -10-(à 13)
4 - Les coefficients C(L) pour $j \rightarrow j_1 + 0$	I. 4 -14-(à 28)
Appendice 5 - Calcul des coefficients C(L).	I A5-1- (à 5)

Chapitre 5 - La géométrie du domaine de polarisation

(= Appendice 6)

1 - Positivity	I A6-1-(à 4)
2 - Convexity	I A6-4-(à 7)
3 - Symmetry plane of a convex domain	I A6-7-(à 12)
4 - The one particle polarization state with B-symmetry and/or even polarization	I A6-13 et 14

- DEUXIEME PARTIE : APPLICATIONS A LA POLARISATION D'UNE  
SEULE PARTICULE DE SPIN DETERMINE

0 - Introduction	II. 0 -1- (à 3)
1 - Polarization of spin 1/2 particle	II. 1 -1- (à 3)
2 - Polarization of spin 1 particle	II. 2 -1- (à 9)
3 - Even polarization of spin 3/2 particle	II. 3 -1- (à 8)
4 - Odd polarization of the spin 3/2 particle	II. 4 -1- (à 13)
5 - Polarization of the spin 2 particle	II. 5 -1- (à 17)

Appendice 1 - The polarization vector of a spin 1 particle	II A1-1- (à 10)
Appendice 2 - Calcul explicite des domaines de polarisation	II A2-1- (à 8)

- TROISIEME PARTIE : AUTRES APPLICATIONS

Chapitre 1 - Superposition de spins

0 - Introduction.	III. 1-1 et 2
1 - Matrice densité d'une superposition de plusieurs spins .	III. 1-3-(à 8)
2 - Paramétrisation multipolaire de la matrice densité de la superposition de plusieurs spins.	III. 1-9-(à 15)
3 - Distribution angulaire de désintégration en deux corps d'une superposition de plusieurs spins.	III. 1-16-(à 19)
4 - Les coefficients $^{jj'}_{\eta_1 + \eta_2} C(L)$ pour la désintégration $\{S\} \rightarrow j_1 + \eta_2$ .	III. 1-20-(à 22)
5 - Calcul des coefficients $^{jj'} C(L)$ pour certaines désintégrations.	III. 1-23 et 24
6 - Application à la superposition $\{1^-, 0^+\}$ .	III. 1-25-(à 32)

Chapitre 2 - Corrélations de polarisation

0 - Introduction	III. 2-1
1 - Opérateurs hermitiques sur un produit tensoriel d'espaces	III. 2-1- (à 4)
2 - Observation des corrélations de polarisation	III. 2-4- (à 6)
3 - Le domaine $\mathcal{D}(1, 2)$ de polarisation, à deux particules	III. 2-6- (à 10)
4 - Conditions sur $\hat{\mathcal{D}}(1, 2)$ imposées par la production et l'observation	III. 2-11- (à 12)
5 - Corrélations de spin $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ ; cas général	III. 2-13- (à 17)
6 - Corrélations de spin $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ , B-symétriques	III. 2-17 à 25

Appendice 1 - Les projections $P_i$	III A1-1 à 2
-------------------------------------	--------------

- REFERENCES

R.1 à R.5
-----------

## INTRODUCTION

"The first problem in data presentation is the realization that the problem of presentation exists. It is possible to compare models with experimental data using an insensitive variable such that agreement is obtained whereas if another variable had been used disagreement would have been found. The real problem is to find variables, or way of displaying the data such that the "physics" of the experiment is clearly visible".

D. R. O. Morrisson

(Proceedings of the Lund International  
Conference on elementary Particles, p. 261).

Il y a certainement un problème pour communiquer les résultats de mesure des polarisations de particules et résonances en physique des hautes énergies. C'est à ce problème que nous nous attaquerons dans ce cours, nous en présenterons la solution générale et son application très explicite à des types particuliers mais très courants d'expériences. Rappelons comment se présente le problème de communication des résultats d'une expérience où n'intervient aucune polarisation de particules.

L'invariance relativiste exige que le taux de transition d'une désintégration ou d'une réaction entre particules ne soit fonction que des invariants de Lorentz qu'on peut former avec les quadrivecteurs impulsion-énergie  $\underline{p}_i$ , de chaque particule. Les invariants sont de la forme

$$\underline{p}_i^2 = m_i^2 \quad \text{et} \quad \underline{p}_i \cdot \underline{p}_j, \quad (1)$$

ainsi que

$$\det(\underline{p}_i, \underline{p}_j, \underline{p}_k, \underline{p}_l) = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_i^\mu p_j^\nu p_k^\rho p_l^\sigma \quad (2)$$

si la parité n'est pas conservée. A cause de la conservation de l'énergie-impulsion, ce pseudo-scalaire est d'ailleurs nul si moins de cinq particules interviennent dans la réaction. La valeur de ces invariants se déduit des valeurs des énergies, impulsions et angles entre les impulsions dans un repère

fixé (centre de masse, laboratoire = repère au repos de la cible, repère au repos d'une des  $n$  particules de la réaction, ...). Les taux de transition (= section efficace, vie moyenne, rapport de branchement) totaux ou différentiels mesurés expérimentalement ne dépendent que de la valeur de ces invariants. Par exemple, pour une désintégration en trois particules, cela est fait en utilisant le diagramme de Dalitz. Chaque événement observé est représenté par un point de ce diagramme et sa position géométrique dans le diagramme contient toute l'information physique. L'intérêt des diagrammes de Dalitz, par rapport à tous les autres possibles pour ces désintégrations, c'est que leur mesure naturelle  $d\sigma$  est celle de l'espace des phases après intégration sur le groupe cinématique de symétrie de cette désintégration, c'est-à-dire dans ce cas, le petit groupe  $G$  de l'impulsion-énergie de la particule qui se désintègre ( $G$  est le groupe des rotations dans le système au repos).

La dimension  $d$  du diagramme des invariants autres que les masses, c'est-à-dire le nombre des produits  $p_i \cdot p_j, i \neq j$ , linéairement indépendants, croît avec le nombre  $n$  de particules intervenant dans la réaction. En effet,

$$d = 3n - 10 \quad \text{pour } n \geq 4$$

$$(d = 0 \quad \text{pour } n \leq 3)$$
(3)

Par exemple pour  $n = 4$ ,  $d = 2$ ; en effet  $s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2$ .

La grande valeur de  $d$ , dimension du diagramme des invariants, rend la représentation de celui-ci difficile. Cependant, une représentation géométrique peut être encore d'une grande utilité comme l'a montré par exemple L. Van Hove (Nucl. Phys. B9 331 1969).

Par définition, la polarisation est ce que l'on doit observer pour déterminer complètement l'état d'une ou plusieurs particules lorsqu'on connaît leur énergie-impulsion.

Dans les réactions entre particules de la physique des hautes énergies, certaines particules ont un spin non nul. Alors une information complète sur la physique de la réaction requiert la mesure de la polarisation des particules finales et/ou celle des particules initiales (cible et/ou faisceau polarisés). Cela comprend aussi les réactions produisant des résonances car à la même approximation où l'on peut attribuer à ces dernières une masse, un spin et une parité

on peut définir leur état de polarisation. Il faut reconnaître qu'il existe dans la littérature un assez grand nombre de paramétrisations. Trop souvent le choix des paramètres de polarisation est fait uniquement en vue de la comparaison avec un modèle théorique à la mode. Mais les expérimentateurs qui peuvent espérer que leurs résultats d'expériences seront utiles pour d'assez nombreuses années <sup>†</sup>, doivent utiliser une façon plus intrinsèque de décrire la polarisation. Il est inquiétant aussi de constater que trop souvent encore le domaine de valeurs possibles pour les paramètres choisis n'est pas connu - ou en tout cas non indiqué - des physiciens qui les mesurent, et il n'est pas rare de voir des points expérimentaux en dehors du domaine imposé par la conservation du moment angulaire et par la positivité des probabilités (on dit encore "par l'unitarité").

Comme nous le montrerons, pour tout point (= ensemble de valeurs des invariants  $p_i p_j$  linéairement indépendants) du diagramme cinématique de la réaction (= diagramme de Mandelstam, Dalitz et leur généralisation) la mesure de la polarisation d'une ou plusieurs particules peut être représentée par un point d'un domaine  $\mathcal{D}$  dans un espace euclidien à  $N$  dimensions. (Voir la table I pour la valeur de  $N$  dans des expériences typiques). Nous ferons une étude

---

<sup>†</sup> La vie moyenne de la majorité des modèles théoriques est inférieure au temps nécessaire pour accomplir une expérience (deux ans ?)



élaborée de ces domaines  $\mathcal{D}$  et de leurs propriétés † .

Toute la signification physique est donnée par la position du point expérimental dans  $\mathcal{D}$  . Est-il sur le bord, près du centre, dans un coin, près d'un point remarquable ?

Pour les types d'expériences traitées dans le cours nous indiquerons quelle partie de  $\mathcal{D}$  est préférée par les modèles théoriques les plus simples.

Représentés de cette façon géométrique et intrinsèque, les résultats expérimentaux pourront être aisément comparés à tout nouveau modèle théorique ‡ . En reportant l'erreur sur le même diagramme on se rendra compte aussi de sa petitesse par rapport à la taille du domaine \* . Il est peut-être dangereux de grouper des résultats d'expériences différentes, mais pour le faire il suffit de prendre dans le domaine géométrique le barycentre des points représentatifs avec leur poids respectif.

† Il y a par exemple une métrique naturelle sur ces domaines, ayant une signification physique importante et il est curieux de constater que les paramétrisations les plus courantes dans la littérature correspondent à un choix de coordonnées non orthonormales pour  $\mathcal{D}$ .

‡ On peut d'ailleurs penser que même les théoriciens décriront leurs prédictions de cette façon intrinsèque. Cela aurait déjà permis de ne pas publier certains papiers théoriques dont les prédictions étaient hors du domaine  $\mathcal{D}$  !

\* Il faut bien reconnaître que pour les expériences préhistoriques d'il y a quelques années où une polarisation était mesurée avec une cinquantaine d'évènements, la taille des erreurs et du domaine  $\mathcal{D}$  étaient comparables. On peut se demander ce qui était mesuré. C'était aussi l'époque où les prédictions des effets de polarisation des modèles étaient bien vérifiées! .

TABLE I

Nombre N de paramètres de polarisation en fonction du spin j de la particule (de masse non nulle)						
<u>Etats à une seule particule</u>						
j	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	j
N	3	8	15	24	35	$(2j+1)^2 - 1$
<u>Etats à deux particules en tenant compte des corrélations de polarisation</u>						
$(j_1, j_2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(1, \frac{3}{2})$	$(2, \frac{3}{2})$	$(j_1, j_2)$	
N	15	35	143	399	$\left[ (2j_1+1)(2j_2+1) \right]^2 - 1$	
<u>Pour l'état général à k particules</u>						
$N = \left( \prod_{i=1}^k (2j_i+1) \right)^2 - 1$						

## Première Partie

LE DOMAINE DES MATRICES DENSITE  
DE POLARISATIONChapitre 1 :

## DESCRIPTION COVARIANTE DE LA POLARISATION

1. - L'espace  $\mathcal{K}_{(m,j)}$  des états d'une particule.

Dans une théorie quantique relativiste les états cinématiques d'une particule forment un espace d'Hilbert  $\mathcal{K}_{(m,j)}$  sur lequel agit la représentation unitaire irréductible de masse  $m$  et de spin  $j$  du groupe de Poincaré  $\mathcal{P}$ . Ces représentations  $(m, j)$  ont été déterminées par Wigner (Ann. Math. 40, 149, 1939). Pour les particules de masse  $m \neq 0$ , Wigner réalise l'espace  $\mathcal{K}_{(m,j)}$  comme l'espace des fonctions :

$$\Omega_m \xrightarrow{\chi} \mathcal{K}_{2j+1} \quad (1)$$

définies sur  $\Omega_m$ , la nappe d'énergie positive de l'hyperboïde de masse

$$\Omega_m : p^2 - m^2 = 0, \quad p^0 > 0 \sim \theta(p) = 1 \quad (2)$$

et à valeur dans un espace d'Hilbert  $\mathcal{K}_{2j+1}$  de dimension  $2j+1$  et de produit scalaire :

$$\langle \chi, \psi \rangle = \sum_{\mu=-j}^j \chi^\mu \psi^\mu \quad (3)$$

Le produit scalaire dans  $\mathcal{K}_{(m,j)}$  est

$$\langle\langle \chi, \psi \rangle\rangle = \int_{\Omega_m} \langle \chi(\underline{p}), \psi(\underline{p}) \rangle d\Omega_m \quad (4)$$

où  $d\Omega_m$ , la mesure invariante relativiste sur  $\Omega_m$ , est :

$$d\Omega_m = \int_{p^0} \theta(\underline{p}) \delta(p^2 - m^2) d^4 p = \frac{d^3 \vec{p}}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \quad (5)$$

Un tel espace  $\mathcal{K}_{(m,j)}$  est encore appelé "intégrale directe" de l'espace  $\mathcal{K}_{2j+1}(\vec{p})$  pour la mesure  $d\Omega_m$  :

$$\mathcal{K}_{(m,j)} = \int_{\Omega_m} \mathcal{K}_{2j+1}(\vec{p}) \frac{d^3 \vec{p}}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \quad (6)$$

et  $\chi(p)^\mu$  est le paquet d'ondes.

Rappelons qu'une transformation de  $\mathcal{P}$ , le groupe de Poincaré, peut être décomposée de façon unique en produit d'une translation  $\underline{a}$  de l'espace temps et d'un élément  $\Lambda$  du groupe de Lorentz  $\mathcal{L}$ . Nous notons  $(\underline{a}, \Lambda)$  les éléments de  $\mathcal{P}$ . La loi de groupe de  $\mathcal{P}$  est :

$$(\underline{a}, \Lambda)(\underline{b}, \mathcal{M}) = (\underline{a} + \Lambda \underline{b}, \Lambda \mathcal{M}) \quad (7)$$

La représentation unitaire irréductible  $(\underline{a}, \Lambda) \mapsto U^{(m,j)}(\underline{a}, \Lambda)$  de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{K}_{(m,j)}$  est définie par :

$$\left[ U^{(m,j)}(\underline{a}, \Lambda) \chi \right] (p)^\mu = e^{i \underline{a} \cdot p} Q(p, \Lambda)^\mu_{\mu'} \chi(\Lambda^{-1} p)^{\mu'} \quad (8)$$

où les  $Q(p, \Lambda)$  sont des matrices  $2j+1$  par  $2j+1$ , unitaires :

$$Q(p, \Lambda) Q(p, \Lambda)^* = I_{2j+1} \quad (9)$$

qui satisfont les relations :

$$Q(p, \Lambda) Q(\Lambda^{-1} p, \mathcal{M}) = Q(p, \Lambda \mathcal{M}) \quad (10)$$

et qui forment un ensemble irréductible de matrices.

Soit  $\mathcal{L}_p$  le petit groupe du vecteur énergie-impulsion  $p$  ; c'est l'ensemble :

$$\mathcal{L}_p = \left\{ \Lambda \in \mathcal{L}, \Lambda p = p \right\} \quad (11)$$

La formule (10) montre que les  $Q(p, \Lambda)$  forment une représentation unitaire irréductible de dimension  $2j+1$  de  $\mathcal{L}_p$ .

Nous allons expliciter les  $Q(p, \Lambda)$ .

Comme il est bien connu,  $\mathcal{L}_p$  est isomorphe au groupe  $\mathcal{R}$  des rotations. En effet  $\mathcal{L}_p$  est le conjugué dans  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{R}$  :

$$\mathcal{L}_p = \Lambda_p \mathcal{R} \Lambda_p^{-1} \quad (12)$$

où  $\Lambda_p$  est la transformation de Lorentz pure de vitesse  $\vec{p}/E$  :

$$\underline{p} = m \Lambda_p \underline{t} \quad (13)$$

où  $\underline{t}$  est le vecteur unité de l'axe des temps. Pour tout élément  $\Lambda$  de  $\mathcal{L}$  :

$$\Lambda \Lambda_p^{-1} \Lambda \Lambda_p \in \mathcal{L}_t \equiv \mathcal{R} \quad (14)$$

et on peut prendre pour  $Q(p, \Lambda)^\ddagger$

$$Q(\underline{p}, \Lambda) = D^{(j)}(\Lambda \Lambda_p^{-1} \Lambda \Lambda_p) \quad (15)$$

## 2. - La polarisation d'une particule.

Les observables qui définissent l'état d'une particule de masse  $m$  et spin  $j$  sont les générateurs hermitiques de  $U^{(m, j)}$  (ils forment à un facteur près la représentation irréductible  $(m, j)$  de  $\underline{\mathcal{P}}$ , l'algèbre de Lie de  $\mathcal{P}$ ) et tous les opérateurs hermitiques fonctions de ces générateurs. Considérer  $E(\underline{\mathcal{P}})$ , l'algèbre enveloppante de  $\underline{\mathcal{P}}$ , c'est se limiter aux fonctions qui sont des polynômes. Les observables énergie-impulsion  $P^\lambda$  et moment cinétique relativiste  $M^{\mu\nu}$  forment une base de l'espace linéaire de ces générateurs. Leurs relations de commutation sont :

$$[P^\lambda, P^\mu] = 0 \quad (16)$$

$$[P^\lambda, M^{\mu\nu}] = i g^{\lambda\mu} P^\nu - i g^{\lambda\nu} P^\mu \quad (16')$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + i g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} - i g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - i g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} \quad (16'')$$

---

† On peut généraliser les  $Q(p, \Lambda)$  en choisissant des tétrades. On note  $\underline{n}(t)^{(\alpha)}$  une tétrade associée à  $\underline{t}$ ,  $\underline{n}(p)^{(\alpha)}$  une tétrade associée à  $p$ , et  $\underline{n}(\Lambda p)^{(\alpha)}$  une tétrade associée à  $\Lambda p$ . Alors  $\Lambda_p$  (resp.  $\Lambda_{\Lambda p}$ ) est l'élément unique de  $\mathcal{L}$  qui transforme  $\underline{n}(t)^{(\alpha)}$  en  $\underline{n}(p)^{(\alpha)}$  (resp.  $\underline{n}(\Lambda p)^{(\alpha)}$ ).

Avec le tenseur métrique de Minkowski  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$  nous pouvons abaisser et lever les indices des  $P^\lambda$  et des  $M^{\mu\nu}$ .

On vérifie que

$$\underline{P}^2 = P^\lambda g_{\lambda\mu} P^\mu = P^\lambda P_\lambda \quad (17)$$

est dans le centre de  $E(\mathcal{J})$  :

$$\left[ \underline{P}^2, P^\lambda \right] = 0 = \left[ \underline{P}^2, M^{\mu\nu} \right] \quad (18)$$

Les  $P^\lambda$  commutent entre eux mais, pour les états d'une particule de spin  $j \neq 0$ , ils ne forment pas un ensemble complet d'observables qui commutent. Pauli<sup>‡</sup> fut le premier à introduire des éléments de  $E(\mathcal{P})$  commutant avec les  $P^\lambda$  :

$$W_\lambda = \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} P^\mu M^{\nu\rho} = \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} M^{\nu\rho} P^\mu \quad (19)$$

On note que

$$\underline{P} \cdot \underline{W} = P^\lambda W_\lambda = \underline{W} \cdot \underline{P} = 0 \quad (20)$$

et on vérifie bien la commutation des  $W^\lambda$  et des  $P^\mu$

$$\left[ W_\lambda, P^\mu \right] = 0 \quad (21)$$

On remarque aussi que

$$\underline{W}^2 = W^\lambda W_\lambda \quad (22)$$

est dans le centre de  $E(\mathcal{P})$ . Sur l'espace  $\mathcal{K}_{(m,j)}$  de la représentation irréductible  $(m, j)$  de  $\mathcal{P}$ ,  $\underline{P}^2$  et  $\underline{W}^2$  doivent donc être multiples de l'identité :

$$\underline{P}^2 = m^2 I, \quad \underline{W}^2 = -m^2 j(j+1) I \quad (23)$$

Nous appellerons l'opérateur quadrivectoriel  $\underline{W}$  (qui est un pseudovecteur pour les symétries d'espace) "l'opérateur de polarisation" puisqu'il va nous servir à former les observables de polarisation. Notons cependant que les composantes de  $\underline{W}$  ne commutent pas entre elles :

$$\left[ W_\lambda, W_\mu \right] = i \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} P^\nu W^\rho \quad (24)$$

‡ Cette découverte fut transmise par tradition orale et non publiée ; voir par exemple : Lubanski, *Physica* 9, 310, 1942. Pour une étude des  $W^\lambda$  voir Bargmann et Wigner, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 34, 211, 1948.

On vérifie alors qu'il suffit d'ajouter une seule composante de  $\underline{W}$  à  $\underline{W}^2, \underline{P}^2$  et  $\underline{P}$  pour former un ensemble complet d'observables qui commutent (autrement dit : pour engendrer une sous-algèbre abélienne maximale de  $\underline{E}(\underline{\mathcal{F}})$ ).

Nous allons suivre le traitement covariant introduit par Michel (Suppl. N. Cim. 24, 95, 1959). Une base  $\underline{n}^{(\alpha)}$  orientée à droite et orthonormée de l'espace temps, satisfait à

$$\underline{n}^{(\alpha)} \cdot \underline{n}^{(\beta)} = g^{\alpha\beta} \quad (25)$$

$$\det(\underline{n}^{(0)}, \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{n}^{(3)}) = \frac{1}{4!} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} n_{\lambda}^{(\alpha)} n_{\mu}^{(\beta)} n_{\nu}^{(\gamma)} n_{\rho}^{(\delta)} = 1 \quad (25')$$

Une tétrade  $\underline{n}(\underline{p})^{(\alpha)}$  de  $\underline{p}$  est par définition une base  $\underline{n}^{(\alpha)}$  orthonormée et orientée à droite avec  $\underline{n}^{(0)} = \underline{p}/m$ .

Comme  $\mathcal{K}_{(m,j)}$  lui-même, tout opérateur  $A$  sur  $\mathcal{K}_{(m,j)}$  peut être décomposé en une intégrale directe :

$$A = \int_{\Omega_m}^{\oplus} A(\underline{p}) \frac{d^3 \underline{p}}{2\sqrt{\underline{p}^2 + m^2}} \quad (26)$$

où  $A(\underline{p})$  est un opérateur agissant sur  $\mathcal{K}_{2j+1}(\underline{p})$ .

A partir des opérateurs  $W^\lambda$  nous pouvons définir les "petits" opérateurs  $W(\underline{p})^\lambda$ . A partir des  $W(\underline{p})^\lambda$  définissons les opérateurs sur  $\mathcal{K}_{2j+1}(\underline{p})$  :

$$S(\underline{p})^{(\alpha)} = -\frac{1}{m} \underline{W}(\underline{p}) \cdot \underline{n}(\underline{p})^{(\alpha)} = \frac{1}{m} W(\underline{p})^\lambda \cdot n_{\lambda}(\underline{p})^{(\alpha)} \quad (27)$$

L'équation (20) implique

$$S(\underline{p})^{(0)} = 0. \quad (27')$$

Réciproquement, on peut exprimer  $\underline{W}(\underline{p})$  en fonction des trois matrices  $S(\underline{p})^{(i)}$ , ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\underline{W}(\underline{p}) = m \sum_i S(\underline{p})^{(i)} \underline{n}(\underline{p})^{(i)} \quad (28)$$

Les relations de commutation (24) s'appliquent encore à  $\underline{W}(\underline{p})$ , l'intégrand de  $\underline{W}$  et elles deviennent :

$$\left[ S(\underline{p})^{(i)}, S(\underline{p})^{(j)} \right] = i \epsilon_{ijk} S(\underline{p})^{(k)} \quad (29)$$

Les  $S(\underline{p})^{(i)}$  sont les composantes de l'opérateur de spin pour une particule  $(m, j)$  d'impulsion-énergie  $\underline{p}$ . En effet les  $S(\underline{p})^{(i)}$  sont les générateurs de la représentation  $D^{(j)}$  de  $\mathcal{L}_p$  (isomorphe à  $\mathfrak{so}(3)$ ) sur  $\mathcal{K}_{2j+1}(\underline{p})$ .

Il est traditionnel de prendre  $\underline{n}(\underline{p})^{(3)}$  pour axe de quantification. Les  $2j+1$  valeurs propres de

$$S(\underline{p})^{(3)} = -\frac{1}{m} \underline{W}(\underline{p}) \cdot \underline{n}(\underline{p})^{(3)} \quad (30)$$

sont  $\lambda$  :

$$j - \lambda \text{ entier} \quad , \quad -j \leq \lambda \leq j \quad (30')$$

Elles sont toutes différentes.

Les vecteurs propres normalisés de  $S(\underline{p})^{(3)}$ , que nous noterons  $|\underline{p}, \lambda\rangle$  forment donc une base orthonormale de  $\mathcal{K}_{2j+1}(\underline{p})$ .

Une particule de masse  $m$ , spin  $j$  et d'impulsion-énergie  $\underline{p}$  est dans un état pur de polarisation si son état est complètement caractérisé par la donnée d'un vecteur normalisé  $|x\rangle$  de  $\mathcal{K}_{2j+1}(\underline{p})$  :

$$|x\rangle = \xi^\lambda |\underline{p}, \lambda\rangle \quad (31)$$

Problème : Est-il possible de choisir l'axe de quantification  $\underline{n}^{(3)}$  tel que  $|x\rangle$  soit vecteur propre de  $S(\underline{p})^{(3)}$  ? Réponse : oui si  $j = \frac{1}{2}$ . Ce n'est plus vrai si  $j \geq 1$ , voir appendice II A-1.

Nous ne traiterons jamais dans ce cours des particules de masse zéro. Elles nécessitent un traitement différent comme le montrent les divisions par  $m$  que nous avons faites.

### 3. - Matrice densité de polarisation.

#### 3.1 - Etats à une particule.

En général une particule  $(m, j)$  d'énergie-impulsion  $\underline{p}$  n'est pas dans un état pur de polarisation. Son état de polarisation est alors appelé "mélange". Il est décrit par un opérateur  $\rho(\underline{p})$  sur  $\mathcal{K}_{2j+1}(\underline{p})$  hermitique, semi-positif, de trace unité :

$$\rho(\underline{p})^* = \rho(\underline{p}) \geq 0 \quad , \quad \text{tr } \rho(\underline{p}) = 1 \quad (32)$$



Rappelons que  $\rho(\underline{p}) \geq 0$  signifie que toutes ses valeurs propres  $\lambda_i$  sont positives ou nulles. Soit  $|i\rangle$  un vecteur propre normalisé correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$

$$\lambda_i = \langle i | \rho(\underline{p}) | i \rangle = \text{tr } \rho(\underline{p}) | i \rangle \langle i | \quad (33)$$

est la probabilité de trouver dans l'état pur de polarisation  $|i\rangle$  la particule qui est dans l'état (mélange) de polarisation  $\rho(\underline{p})$ . Cet opérateur  $\rho(\underline{p})$  qui décrit l'état de polarisation est usuellement appelé matrice densité de polarisation.

Si la particule est dans un état pur de polarisation, on a

$$\rho(\underline{p}) = |x\rangle \langle x| \quad (34)$$

On a bien  $\text{tr } \rho(\underline{p}) = \langle x | x \rangle = 1$ .

Notons que  $|x\rangle$  et  $e^{i\varphi} |x\rangle$  décrivent le même état pur et correspondent à la même matrice densité  $e^{i\varphi} |x\rangle \langle x| e^{-i\varphi} = |x\rangle \langle x|$ .

Notons enfin que tout opérateur sur  $\mathcal{H}_{2j+1}(\underline{p})$  satisfaisant (32) décrit un état de polarisation.

### 3.2 - Etats à k particules.

L'espace d'Hilbert  $\mathcal{K}$  des états de k particules distinctes de masses  $m_A$ , spins  $j_A$ , est le produit tensoriel ( $A = 1, \dots, k$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{H}_{2j_1+1}(m_1, j_1) \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1}(m_2, j_2) \otimes \dots \\ &= \bigotimes_{A=1}^k \mathcal{H}_{2j_A+1}(m_A, j_A) \end{aligned} \quad (35)$$

sur lequel agit la représentation

$$U = \bigotimes_{A=1}^k U^{(m_A, j_A)} \quad (36)$$

du groupe de Poincaré. Pour des particules identiques, le produit tensoriel doit être symétrisé ou antisymétrisé, suivant que les particules sont des bosons ou des fermions. Pour simplifier l'écriture nous ne considérerons dans la suite que deux particules distinctes. Dans ce cas  $\mathcal{K}$  est une intégrale directe double.

$$\mathcal{K} = \int_{\Omega_{m_1} \times \Omega_{m_2}}^{\oplus} \mathcal{H}_{2j_1+1}(\underline{p}_1) \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1}(\underline{p}_2) d\Omega_{m_1} d\Omega_{m_2} \quad (37)$$

Lorsque les deux particules ont des énergies-impulsions  $\underline{p}_1, \underline{p}_2$ , la polarisation de cet état à deux particules est décrite par un opérateur  $\rho(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$  sur  $\mathcal{K}_{2j_1+1}(\underline{p}_1) \times \mathcal{K}_{2j_2+1}(\underline{p}_2)$  satisfaisant à :

$$\rho(\underline{p}_1, \underline{p}_2)^* = \rho(\underline{p}_1, \underline{p}_2) \geq 0, \quad \text{tr } \rho(\underline{p}_1, \underline{p}_2) = 1 \quad (38)$$

Comme nous le verrons dans la partie III, la connaissance de  $\rho(\underline{p}_1, \underline{p}_2)$  contient beaucoup plus d'information que la connaissance de la polarisation de chaque particule séparément.

#### 4. - L'espace des observables de polarisation et le domaine de polarisation.

Avant l'intégration avec le paquet d'ondes sur l'hyperboloïde de masse  $\Omega_m$  (ou sur le produit des  $\Omega_m$ ), nous avons donc montré que la polarisation est décrite par un opérateur  $\rho^* = \rho \geq 0$ ,  $\text{tr } \rho = 1$  sur un espace d'Hilbert  $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{2j_1+1}(\underline{p}_1)$  de dimension finie  $n = \prod_1 (2j_1+1)$ .

Nous nous intéressons ici aux observables de polarisations que sont les opérateurs hermitiques sur  $\mathcal{K}_n$ .

Rappelons que si  $A = A^*$  est un tel observable, sa valeur moyenne pour l'état décrit par  $\rho$  est

$$\langle A \rangle = \text{tr } A \rho. \quad (39)$$

Rappelons aussi des notions simples concernant les opérateurs linéaires sur un espace d'Hilbert  $\mathcal{K}_n$  de dimension finie.

Les opérateurs forment un espace vectoriel complexe  $\mathfrak{L}(\mathcal{K}_n)$  de dimension  $n^2$ . Les opérateurs hermitiques  $A^* = A$  forment un sous-espace vectoriel réel  $\mathfrak{H}(\mathcal{K}_n)$  de dimension  $n^2$ .

L'espace  $\mathfrak{L}(\mathcal{K}_n)$  peut être muni d'un produit scalaire hermitien  $\langle A, B \rangle$  ainsi défini :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr } A^* B \quad (40)$$

Cette équation donne au sous-espace réel  $\mathfrak{H}(\mathcal{K}_n)$  une structure d'espace euclidien  $\mathfrak{E}_{n^2}$ , de dimension  $n^2$ , avec le produit scalaire

$$(A, B) = \text{tr } AB \quad (41)$$

La distance de deux "points",  $A, B \in \mathcal{E}_{n^2}$  est

$$d(A, B) = (A - B, A - B)^{1/2} \geq 0. \quad (42)$$

En prenant l'opérateur 0 comme origine la sphère unité  $\mathcal{S}_N$  de dimension  $N = n^2 - 1$  est l'ensemble des opérateurs hermitiques  $A$  tels que :

$$A \in \mathcal{S}_N \Leftrightarrow \text{tr } A^2 = 1 \quad (43)$$

Soit  $\rho$  une matrice densité,  $\lambda_i$  ses valeurs propres (distinctes ou non)

$$0 \leq \lambda_i, \quad \text{tr } \rho = \sum_i \lambda_i = 1$$

Alors

$$\text{tr } \rho^2 = \sum_i \lambda_i^2 = (\sum_i \lambda_i)^2 - \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \leq 1 \quad (44)$$

Les matrices densité  $\rho$  sont à l'intérieur ou sur  $\mathcal{S}_N$ . L'équation (44) montre que seuls les états purs (un seul  $\lambda_i \neq 0$ ) sont sur  $\mathcal{S}_N$ .

Nous pouvons encore traduire géométriquement les autres conditions définissant les matrices densité :

$\text{tr } \rho = 1$  définit le sous-espace  $\mathcal{E}_N$  (plan de dimension  $N = n^2 - 1$  de  $\mathcal{E}_{n^2}$ ).

$\rho > 0$  définit un cône  $\mathcal{C}_n$  de sommet 0. L'ensemble des matrices densité sur  $\mathcal{K}_n$  forme un domaine  $\mathcal{D}_n$  de  $\mathcal{E}_{n^2}$  :

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{C}_n \cap \mathcal{E}_N \subset \mathcal{S}_N \cap \mathcal{E}_N = \mathcal{S}_{N-1} \quad (45)$$

La figure 1 résume cette situation. Le centre de  $\mathcal{S}_{N-1}$  est la matrice

$$\rho_0 = \frac{1}{n} I \quad (46)$$

qui est le pied de la perpendiculaire de 0 sur  $\mathcal{E}_N$ .

$$d(0, \rho_0)^2 = \text{tr } \rho_0^2 = \frac{1}{n}$$

Le rayon de la sphère  $\mathcal{S}_{N-1}$  est

$$(1 - d(0, \rho_0)^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \quad (47)$$

La matrice  $\rho_0$  est une matrice densité de polarisation. Elle décrit l'état "non-polarisé". Le degré de polarisation d'un état  $\rho$  est proportionnel à  $d(\rho, \rho_0)$ . Il est nul pour  $\rho_0$ . On veut qu'il soit 1 pour les états purs (qui sont sur  $\mathcal{S}_{N-1}$ ), on a donc la définition :

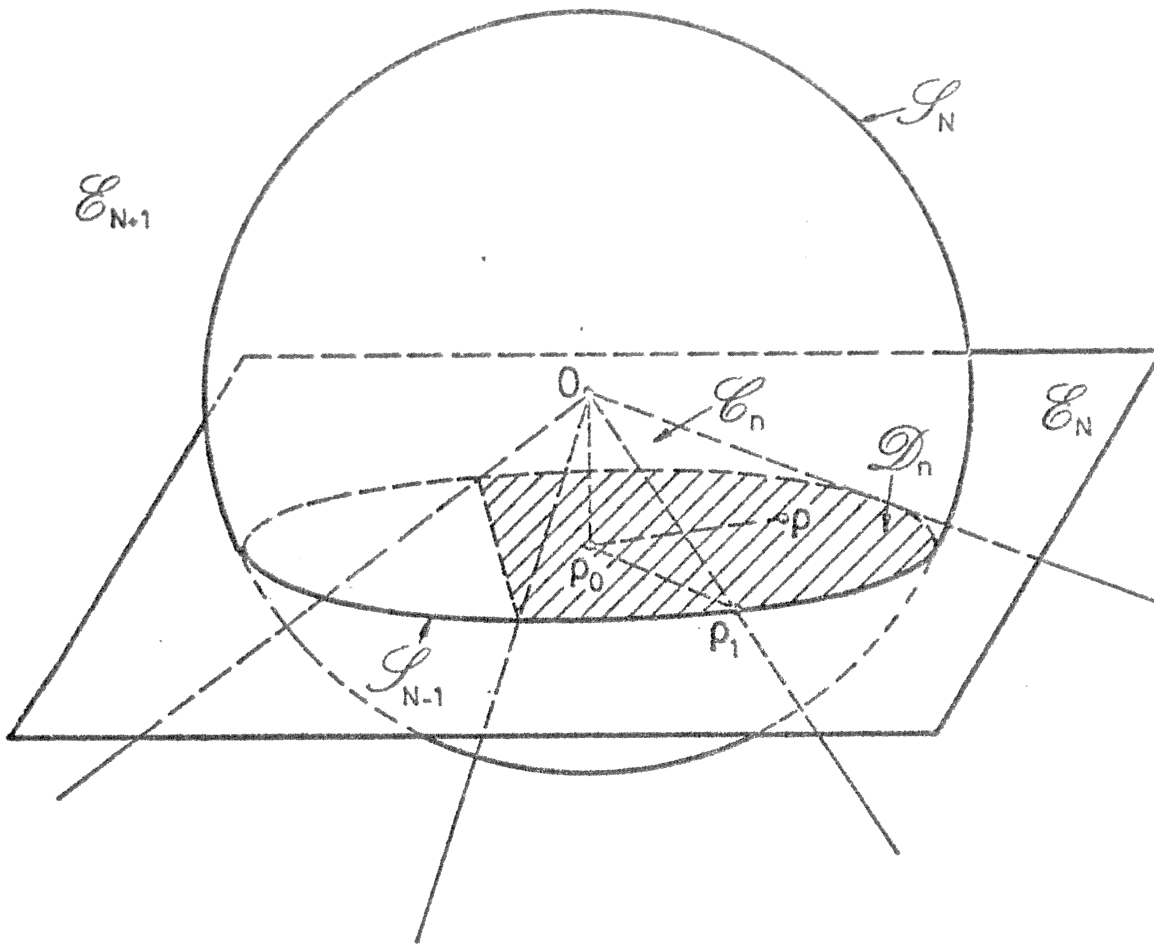


FIG.1

Fig. 1. L'espace euclidien  $\mathcal{E}_{N+1}$  des opérateurs hermitiques sur  $\mathcal{K}_n$ , le sous-espace  $\mathcal{E}_N$  des opérateurs de trace 1 et la sphère  $\mathcal{S}_N$  de rayon 1. Le domaine  $\mathcal{D}_n$  des matrices de polarisation est l'intersection  $\mathcal{E}_{N+1} \cap \mathcal{C}_n$  où  $\mathcal{C}_n$  est le cône convexe des opérateurs positifs. Les états purs sont représentés par les points de la frontière de  $\mathcal{D}_n$  contenus dans  $\mathcal{S}_{N-1} = \mathcal{S}_N \cap \mathcal{E}_N$ . La matrice densité  $\rho_0 = \frac{1}{n} I$  de l'état non polarisé est représentée par le point  $\rho_0$  centre de  $\mathcal{S}_{N-1}$ . Par une dilatation de centre O et de facteur  $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$  le rayon de  $\mathcal{S}_{N-1}$  devient unité et pour toute matrice densité  $\rho$  la distance  $d_\rho = |\rho - \rho_0|$  donne le degré de polarisation.

Degré de polarisation de  $\rho = d_\rho$

$$d_\rho = \sqrt{\frac{n}{n-1}} d(\rho, \rho_0) = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \left( (\text{tr } \rho^2) - \frac{1}{n} \right)^{1/2} \quad (48)$$

Notons que si deux états purs  $|x\rangle, |y\rangle$  sont orthogonaux dans  $\mathcal{K}_n$  ;  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = 0$ , leurs matrices densités  $\rho_x = |x\rangle\langle x|, \rho_y = |y\rangle\langle y|$  sont orthogonales :  $\text{tr } \rho_x \rho_y = 0$ . La structure euclidienne de  $\mathcal{E}_{n^2}$  a donc bien une signification physique.†

Nous étudions la géométrie de ce domaine  $\mathcal{D}_n$  dans plusieurs parties de notre travail "Polarization density matrix", entre autres dans l'appendice I.A6 annexé au cours, où nous étudions plus spécialement ses propriétés de convexité et certains plans de symétrie.

La convexité de  $\mathcal{D}_n$  traduit la propriété : si  $\rho_1, \rho_2$  sont deux matrices densités  $\rho = \lambda \rho_1 + (1 - \lambda) \rho_2$  est une matrice densité pour tout  $\lambda$  satisfaisant  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

### 5. - Covariance relativiste de la polarisation.

L'équation (8) nous donne explicitement la représentation de  $\mathcal{P}$ , le groupe de Poincaré, sur  $\mathcal{K}_{(m, j)}$ . Connaissant la loi de transformation de  $\chi(\underline{p})^\mu$  nous pouvons en déduire celle des matrices densités  $\rho(\underline{p})$  puisque la matrice  $\rho(\underline{p})$  d'éléments

$$\rho(\underline{p})^\mu_\nu = \chi(\underline{p})^\mu \bar{\chi}(\underline{p})^\nu \quad (49)$$

est la matrice densité d'un état pur.

Par l'action de  $(\underline{a}, \Lambda)$ ,  $\rho(\underline{p})$  devient

$$(\underline{a}, \Lambda) \rho(\underline{p}) = Q(\underline{p}, \Lambda) \rho(\Lambda^{-1} \underline{p}) Q(\underline{p}, \Lambda)^* \quad (50)$$

Notons que pour se donner explicitement  $\rho(\underline{p})$ , par ses éléments de matrices, il faut choisir une tétrade  $\underline{n}(\underline{p})^{(\alpha)}$ .

Stora (séminaire miméographié de Saclay) a le premier systématisé l'étude de la covariance en considérant  $\chi$  et  $\rho$  comme fonction sur les tétrades de  $\underline{p} \in \Omega_m$

† Pour réduire au minimum le nombre de dimensions des diagrammes, nous nous restreindrons au sous-espace euclidien  $\mathcal{E}_N$  en prenant toujours  $\rho_0$  comme origine et  $d_\rho$  comme longueur du vecteur  $\rho_0 \rho$ .

et en abrégant la notation  $\underline{n}(\underline{p})^{(\alpha)}$  en  $\{\underline{p}\}$ . Nous renvoyons au cours de Moussa pour l'étude complète de la covariance de la polarisation. Nous parlerons plus loin des choix pratiques de tétrades.

Limitons-nous ici aux transformations de  $\mathfrak{L}_p$ , le petit groupe de  $\underline{p}$ . Puisque  $\mathfrak{L}_p$  est isomorphe à  $\mathfrak{P}_3$ , nous les appellerons "rotations". Pour une telle "rotation", (50) s'écrit (voir (15)) :

$$\Lambda \in \mathfrak{L}_p, \quad (\Lambda) \rho(\underline{p}) = D^{(j)}(\Lambda^{-1} \Lambda_p) \rho(\underline{p}) D^{(j)}(\Lambda_p^{-1} \Lambda_p)^* \quad (51)$$

Le groupe des "rotations agit donc par la représentation  $D^{(j)}$  sur  $\mathfrak{K}_{2j+1}(\underline{p})$  et par la représentation  $D^{(j)} \otimes \bar{D}^{(j)}$  sur l'espace  $\mathfrak{L}(\mathfrak{K}_{2j+1}(\underline{p}))$  des observables de polarisation. La décomposition de cette représentation en somme directe de représentations irréductibles

$$D^{(j)} \otimes \bar{D}^{(j)} = \oplus_{L=0}^{2j} D^{(L)} \quad (52)$$

décompose l'espace  $\mathfrak{L}_{(2j+1)^2}$  en une somme directe

$$\mathfrak{L}_{(2j+1)^2} = \oplus_{L=0}^{2j} \mathfrak{L}_{2L+1}^{(L)} \quad (53)$$

et toute matrice  $\rho \in \mathfrak{L}_{(2j+1)^2}$  en une somme (ordinaire) de matrices  $\rho^{(L)}$

$$\rho = \sum_{L=0}^{2j} \rho^{(L)} = \frac{1}{2j+1} + \sum_{L=1}^{2j} \rho^{(L)} \quad (54)$$

qu'on appelle les composantes multipolaires de  $\rho$ ; la matrice  $\rho^{(L)}$  est appelée le  $2^L$ -pôle de  $\rho$ . Par exemple  $L = 1$ , dipôle,  $L = 2$ , quadrupôle,  $L = 3$ , octupôle, etc. . . .

Considérons l'algèbre enveloppante  $E(\mathfrak{L}_p)$ , formée par les polynômes en  $S(\underline{p})^{(i)}$ . Grâce aux relations de commutation (29) nous pouvons symétriser complètement tout polynôme. Par exemple :

$$\Sigma_i (S(\underline{p})^{(i)})^2 = -\frac{1}{m^2} \underline{W}(\underline{p})^2 \quad (55)$$

est le polynôme de Casimir. Sur l'espace  $\mathfrak{K}_{2j+1}$  il est égal à  $j(j+1)I$ . Les polynômes symétriques homogènes de degré  $L$  en  $S^{(i)}$

$$\text{ex. } L = 4 \quad \Sigma_{ijkl} C_{ijkl} S^{(i)} S^{(j)} S^{(k)} S^{(l)},$$

les  $C_{ijkl}$  étant réels complètement symétriques dans les indices et de plus

tels que

$$\sum_i C_{iikk} = 0$$

forment sur l'espace  $\mathcal{K}_{2j+1}$  les opérateurs de l'espace  $\mathcal{E}_{2L+1}^{(L)}$ . D'où la décomposition covariante de  $\rho(\underline{p})$  en multipôles (Michel 1959) (utiliser (27)) :

$$\rho(\underline{p}) = \frac{1}{2^{j+1}} s_\lambda \frac{W^\lambda(\underline{p})}{m} + s_{\lambda\mu} \frac{W^\lambda(\underline{p})}{m} \frac{W^\mu(\underline{p})}{m} + \dots + (-1)^{2j} s_{\lambda\mu\nu\dots\sigma} \overbrace{\frac{W^\lambda(\underline{p})}{m} \dots \frac{W^\sigma(\underline{p})}{m}}^{2j \text{ facteurs}} \quad (56)$$

où les tenseurs d'espace-temps  $s_{\lambda\mu\dots}$  sont complètement symétriques et satisfont

$$s_{\lambda\mu\dots}^\lambda = 0 \quad (56')$$

et (27')

$$\underline{p} \cdot \underline{s} = p^\lambda s_{\lambda\mu\dots} = 0 \quad (56'')$$

En résumé, la polarisation d'une particule de spin  $j$ , masse  $m$  et impulsion-énergie  $\underline{p}$  est entièrement décrite de façon covariante par les tenseurs multipolaires  $s_\lambda$ ,  $s_{\lambda\mu\dots}$ . L'opérateur  $\underline{W}$  étant un pseudo-vecteur, la parité de ces tenseurs est  $(-1)^L$ .

Pour une particule de spin  $\frac{1}{2}$ , il suffit donc du pseudo-quadrivecteur  $\underline{s}$ , orthogonal à  $\underline{p}$  pour décrire entièrement la polarisation  $\hat{f}$ . Le degré de polarisation est  $d = (-\underline{s}^2)^{1/2}$ .

Si une particule évolue dans un champ électromagnétique  $F^{\mu\nu}$  macroscopique lentement variable dans le temps et dans l'espace (c'est-à-dire la particule ne "sent" pas le gradient et les autres dérivées du champ), l'interaction de la particule avec le champ ne dépend que du rapport  $\frac{e}{m}$ , si la particule est chargée, et du moment magnétique  $\mu$ . Si la particule est chargée on pose

Pour l'expression de  $\underline{W}(\underline{p})$  et de  $\underline{s}$  en théorie de Dirac, voir Michel et Wightman (Phys. Rev. 98, 1190, 1955) et les différents cours communs ou séparés, publiés ou non de ces auteurs, en particulier Wightman, Les Houches 1960.

$\mu = \frac{g e j \hbar}{m c}$  où  $g$  est le facteur de Landé (nombre pur) et  $j$  le spin.

Le mouvement de la particule est donné par

$$\dot{\underline{u}} = \frac{e}{m} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{u} \quad (57)$$

où  $\underline{u} = \underline{p}/m$  ; le point indique la dérivée par rapport au temps propre.

Le dipôle de la polarisation évolue suivant l'équation : (Bargmann, Michel et Telegdi : Phys. Rev. Lett. 2, 435, (1959) )<sup>†</sup>

$$\dot{\underline{s}} = \frac{e}{m} \underline{\underline{M}} \cdot \underline{s} \quad (58)$$

avec 
$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{F}} + \frac{g-2}{2} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{P}} \quad (58')$$

où 
$$\underline{\underline{P}} = 1 - \underline{u} \otimes \underline{u}$$

$\underline{\underline{M}}$ , comme  $\underline{\underline{F}}$ , est un tenseur antisymétrique. Explicitement

$$(\underline{\underline{P}} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{P}})^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + (\underline{u} \wedge (\underline{\underline{F}} \cdot \underline{u}))^{\mu\nu}$$

où  $(\underline{a} \wedge \underline{b})^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$  et

$$(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{u})^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu$$

Nous remarquons que  $\underline{u}$  satisfait à la même équation (58) que  $\underline{s}$ . Nous pouvons attacher à la particule une tétrade solution de (58). Le tenseur antisymétrique  $\underline{\underline{M}}$  représente aussi une transformation de Lorentz infinitésimale. L'équation (58) intégrée fournit donc une transformation  $\Lambda(t) \in \mathcal{L}$  avec les conditions initiales  $\Lambda(0) = 1$ .

La polarisation  $s^\lambda, s^{\lambda\mu}, s^{\lambda\mu\nu} \dots$  à l'instant  $t$  est obtenue de celle à l'instant zéro par la transformation  $\Lambda(t)$ . Autrement dit les composantes des tenseurs multipolaires de polarisation dans la tétrade mobile

$$n(t)^{(\alpha)\mu} = \Lambda(t)^\mu_\nu n(0)^{(\alpha)\nu} \text{ sont indépendantes du temps } \star$$

$$\frac{d}{dt} s(t)^{\lambda\mu\nu} \dots n(t)^{(\alpha)}_\lambda n(t)^{(\beta)}_\mu n(t)^{(\gamma)}_\nu \dots = 0 \quad (59)$$

<sup>†</sup> Si  $e$  est nul, on ne conserve dans (58) que le terme en  $\frac{g e}{m}$  qu'on pose égal à  $\mu/j$ .

<sup>‡</sup> Pour le lepton  $\mu$  ou l'électron,  $g-2$  est petit, de l'ordre de  $10^{-3}$ . Il est alors intéressant de considérer le mouvement de  $\underline{s}$  relatif à une tétrade solution de (57). Ce mouvement relatif est lent, il est proportionnel à  $g-2$ .



Terminons cette section par une remarque sur les plurimultipôles de polarisation des états à  $k$  particules. Il suffit de généraliser les équations (53) et (54). Comme nous l'avons vu en (37), les matrices densités  $\rho(p_1, p_2, \dots, p_k)$  agissent sur l'espace  $\bigotimes_{i=1}^k \mathcal{K}_{(2j_i+1)}^{(p_i)}$  et sont donc des vecteurs de

$$\mathcal{E} = \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{E}_{(2j_i+1)^2} \text{ dont chaque facteur se décompose suivant (37). Par}$$

exemple pour trois particules

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{L_1=0, L_2=0, L_3=0}^{2j_1, 2j_2, 2j_3} \mathcal{E}_{2L_1+1}^{(L_1)} \otimes \mathcal{E}_{2L_2+1}^{(L_2)} \otimes \mathcal{E}_{2L_3+1}^{(L_3)} \quad (60)$$

d'où la somme ordinaire

$$\rho(p_1, p_2, p_3) = \sum_{L_1=0, L_2=0, L_3=0}^{2j_1, 2j_2, 2j_3} \rho(p_1, p_2, p_3)^{(L_1, L_2, L_3)} \quad (60')$$

### 6. - Le domaine des matrices densité observées dans une expérience.

Dans une expérience donnée intéressons-nous à  $\rho$ , la matrice densité de l'état de polarisation de  $k$  des particules finales. Comme nous l'avons vu, toute matrice du domaine  $\mathcal{D}_n$  de (45) (où  $n = \prod_{i=1}^k (2j_i+1)$ ) peut être une matrice densité de polarisation. Cependant les conditions de l'expérience peuvent imposer à  $\rho$  d'être dans un sous-domaine  $\hat{\mathcal{D}}_n$  de  $\mathcal{D}_n$ . Nous étudierons en détail au chapitre III le cas où les conditions initiales (cible et faisceau non polarisés) et d'observation de l'état final (par exemple réaction de quasi deux particules finales) ont un 3-plan de symétrie. Si la parité est conservée dans la réaction, alors  $\rho$  doit aussi avoir ce 3-plan comme plan de symétrie et nous appellerons B-conditions la condition que doit satisfaire  $\rho$  d'être dans (un plan de symétrie de  $\mathcal{D}_n$  dans l'espace  $\mathcal{E}_N$ ). Le domaine  $\hat{\mathcal{D}}_n = \hat{\mathcal{E}}_N \cap \mathcal{D}_n$  a la dimension  $\hat{N} = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$  si  $n$  est impair,  $\hat{N} = \frac{n^2}{2} - 1$  si  $n$  est pair.

(61)

Dans d'autres cas, que nous étudierons aussi au chapitre III, la conservation du moment angulaire impose à la matrice  $\rho$  d'être dans une partie de la frontière du domaine  $\mathcal{D}_n$ , et parfois du domaine  $\hat{\mathcal{D}}_n$ . (voir condition de rang).

Enfin, il peut être impossible de déterminer complètement la matrice  $\rho$  dans l'expérience considérée. Par exemple, comme nous le verrons au chapitre IV, dans le cas de résonances non étranges, seuls les multipôles  $\rho^{(L)}$ ,  $L$  pair, de la matrice densité  $\rho$  peuvent être observés. Nous parlerons dans ce cas de la polarisation paire de la particule  $f$ . Cela correspond à observer la projection  $\Gamma$  du domaine convexe  $\hat{\mathcal{D}}_n$  sur un sous-espace  $H$ . Soit

$$C = \hat{\mathcal{D}}_n \cap H \quad (62)$$

On doit avoir  $C \subset \Gamma$  (voir figure 2). Si  $\Gamma$  est strictement plus grand que  $C$ , et si la matrice mesurée  $\rho_{ob}$  (qui doit être dans  $\Gamma$ ) n'est pas dans  $C$ , elle ne satisfait pas la positivité.

Nous pourrions prédire au chapitre V un certain nombre de cas où  $C = \Gamma$ .

En physique nucléaire on dit "alignement".

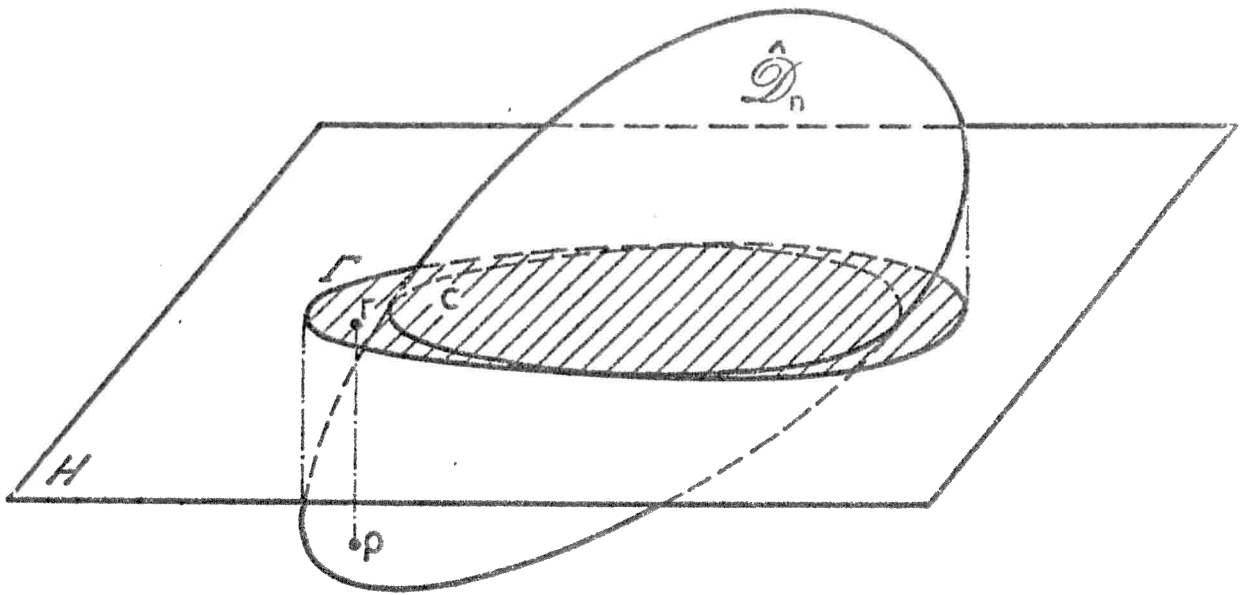


FIG.2

Fig.2.

$\Gamma$  est le contour apparent (= la projection verticale) de  $\hat{\mathcal{D}}_n$  sur le 2-plan horizontal  $H$  et  $C = \hat{\mathcal{D}}_n \cap H$ . Les deux domaines  $C$  et  $\Gamma$  sont convexes et  $C \subset \Gamma$ .

## 7. - Remarques sur la présentation des résultats de mesure de polarisation.

---

Nous espérons qu'avec l'aide de ce cours les expérimentateurs sauront déterminer le domaine  $\Gamma$  des paramètres de la matrice densité de polarisation mesurés dans leur expérience. Notons que certains résultats expérimentaux sont observés à l'extérieur de  $\Gamma$ . On pourrait interpréter ces expériences comme une preuve de la non-conservation du moment cinétique, mais il est préférable de s'assurer d'abord que les autres hypothèses qui ont été faites dans l'analyse ne sont pas en défaut. Par exemple les hypothèses que l'on a faites sur le spin des particules produites sont peut-être à rejeter. De plus les résonances sont en général produites avec un "fond" important. Si ce fond est incohérent et non polarisé, son seul effet est de décroître proportionnellement la polarisation observée. Par contre, les interférences des différentes ondes partielles du fond avec l'onde de la résonance peuvent très bien ne pas être négligeables. Dans la troisième partie nous étudierons un tel cas simple : résonance de spin 1 interférant avec un fond de spin 0.

C'est l'art du physicien de savoir distinguer si un certain nombre d'hypothèses simplificatrices peuvent être utilement appliquées à son expérience. Le but de ce cours est de donner les conséquences des différentes hypothèses simplificatrices habituelles : une résonance à un spin et une parité déterminés.

De plus, pour certaines expériences, le nombre de paramètres mesurables peut être supérieur à la dimension du domaine  $\Gamma$ . Dans ce cas l'expérience peut vérifier certaines des hypothèses utilisées pour déterminer  $\Gamma$ . Par exemple, on peut vérifier la conservation de la parité dans une expérience B-symétrique. En effet les paramètres de polarisation  $r_{\mathbf{M}}^{(\mathbf{L})}$  qui doivent être nuls par la condition B sont mesurables comme les autres. Leur mesure doit être faite. Une incompatibilité avec zéro serait la preuve d'une violation de la parité.

Dans le cas où toutes les hypothèses simplificatrices sont applicables, tous les choix possibles des paramètres de polarisation sont-ils équivalents? La réponse est négative. En effet, dans une expérience de précision infinie,

on peut passer par une simple transformation mathématique d'un choix de paramètres indépendants à un autre. Mais pour des résultats expérimentaux groupés par "bins", cette transformation est nécessairement approchée<sup>†</sup>. Aussi, nous pensons qu'il est utile, pour les réactions à quasi deux corps, de publier les différents diagrammes correspondant aux trois différents choix physiques de "frames" (voir ch. III. A2) adaptés à l'étude des échanges dans les voies s, t, u. Une présentation redondante des résultats d'une expérience peut certainement faciliter la comparaison avec toutes les hypothèses théoriques proposées ultérieurement.

Notons que la représentation géométrique que nous proposons dans la deuxième partie est intrinsèque<sup>‡</sup> et que mieux qu'un tableau de nombres elle permet de visualiser les résultats d'une expérience et leur comparaison avec les modèles théoriques passés, à la mode ou futurs!

---

† Par contre le passage d'une quantification en hélicité à une quantification en transversité (et vice versa) est toujours une simple transformation mathématique.

‡ Si les points représentant une expérience étaient vraiment différents pour différents choix de paramètres, ce serait une indication que les erreurs (qui doivent être représentées sur le diagramme géométrique) sont sous estimées.

## PARTIE I - APPENDICE 1

TENSEUR METRIQUE DE L'ESPACE  $\mathbb{K}_{2j+1}$ SYMBOLES  $-3j$  ET  $-6j$ 1 - Tenseur métrique de l'espace  $\mathbb{K}_{2j+1}$ .

Soient  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel de dimension finie dont les vecteurs sont notés  $x$  et  $\mathcal{E}^*$  son espace vectoriel dual dont les vecteurs sont notés  $y^T$ . On note  $y^T x$  le résultat de l'application linéaire  $y^T$  du vecteur  $x$ . Si on définit une base dans  $\mathcal{E}$  et sa base duale dans  $\mathcal{E}^*$ , le vecteur  $x$  est représenté par une matrice colonne, le vecteur  $y^T$  est représenté par une matrice ligne et le résultat  $y^T x$  est obtenu en faisant le produit matriciel de  $y^T$  et  $x$ .

i) A l'action du groupe  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{E}$  par la représentation linéaire irréductible :  $\mathcal{G} \ni g \rightsquigarrow D(g)$ , correspond une action sur  $\mathcal{E}^*$  par la représentation contra-grédiente :  $\mathcal{G} \ni g \rightsquigarrow D(g)^{-1T}$ . Si ces deux représentations sont équivalentes, il existe un opérateur d'entrelacement  $\Gamma$  tel que

$$\Gamma D(g) \Gamma^{-1} = D(g)^{-1T} \quad (a)$$

ii) Soit  $\gamma(x, y)$  une forme bilinéaire non dégénérée sur  $\mathcal{E}$ . Elle définit un isomorphisme  $\gamma^T$  entre  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}^*$  :

$$\mathcal{E} \ni x \rightsquigarrow \gamma(x, \cdot) = \gamma^T(x) = (G^T x)^T = x^T G \in \mathcal{E}^*$$

où  $G$  est une matrice inversible. Cela permet d'écrire la forme bilinéaire sous la forme

$$\gamma(x, y) = x^T G y$$

On dit que la forme bilinéaire  $\gamma$  est invariante par l'action du groupe si on a :

$$\left. \begin{array}{l} \forall g \in \mathcal{G} \\ \forall x, y \in \mathcal{E} \end{array} \right\} \quad \gamma(D(g)x, D(g)y) = \gamma(x, y)$$

Cette invariance implique la condition sur  $G$

$$\forall x, y \quad x^T D(g)^T G D(g) y = x^T G y$$

ou

$$G D(g) G^{-1} = D(g)^{-1T} \quad (b)$$

c'est-à-dire que la représentation  $D(g)$  est équivalente à sa contragrédiente, la matrice d'entrelacement étant la matrice  $G$ .

La comparaison des équations (a) et (b) montre que réciproquement, toutes les fois qu'une représentation d'un groupe est équivalente à sa contragrédiente, l'opérateur d'entrelacement  $\Gamma$  permet de définir une forme bilinéaire invariante de l'espace sur lequel agit la représentation.

Les représentations unitaires irréductibles du groupe  $SU(2)$  sont équivalentes à leur contragrédiente. Nous allons montrer comment cette propriété permet de définir une forme bilinéaire sur l'espace  $\mathcal{H}_{2j+1}$  des états de polarisation d'une particule de spin  $j$ . Pour des raisons pédagogiques nous conduisons les calculs en parallèle avec l'exemple, plus connu des physiciens, du groupe de Lorentz agissant sur l'espace de Minkowski.

Les transformations du groupe de Lorentz sur l'espace de Minkowski sont représentées par les matrices réelles  $4 \times 4$ , notées  $\Lambda_\mu$ , d'éléments

$$\Lambda_{\nu}^{\mu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Elles satisfont la relation de pseudo-orthogonalité :

$$G \Lambda G^{-1} = \Lambda^{-1T},$$

où G est la matrice

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$G_{\nu}^{\mu} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Notons que

$$G^{-1} = G = G^T$$

La matrice G représente une transformation de Lorentz particulière, la symétrie d'espace (renversement des coordonnées d'espace) :

$$G = I_S$$

Les transformations du groupe des rotations sur l'espace  $\mathcal{H}_{2j+1}$  des états de polarisation d'une particule de spin j sont représentées par les matrices unitaires,  $(2j+1) \times (2j+1)$ , notées  $D^j$ , ou  $D^j(R)$ , d'éléments

$$(1) \quad D^j(R)_{m'}^m, \quad m, m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j.$$

Elles satisfont la relation d'équivalence avec la représentation complexe conjuguée :

$$(2) \quad \Gamma_j D^j (\Gamma_j)^{-1} = (D^j)^{-1T} = \overline{D^j},$$

où  $\Gamma_j$  est la matrice

$$(3) \quad \Gamma_j = \begin{bmatrix} & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ (-)^{2j} & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$(3') \quad (\Gamma_j)_{m'}^m = (-)^{j-m} \delta_{m, -m'}.$$

Notons que

$$(4) \quad (\Gamma_j)^{-1} = (-)^{2j} \Gamma_j = (\Gamma_j)^T$$

La matrice  $\Gamma_j$  représente une rotation particulière, la rotation de  $-\pi$  autour de l'axe  $\underline{n}_2$  :

$$(5) \quad \Gamma_j = D^j(\underline{n}_2, -\pi)$$



On définit les composantes contra-variantes  $g^{\mu\nu}$  du tenseur métrique de l'espace de Minkowski par la relation :

$$g^{\mu\nu} = G^{\mu}_{\nu} \quad (6)$$

Notons que la matrice  $G$  étant symétrique, le tenseur métrique est symétrique

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} \quad (7)$$

Les composantes covariantes  $g_{\mu\nu}$  du tenseur métrique sont définies par

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta^{\rho}_{\mu} \quad (8)$$

et on a

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (9)$$

Le tenseur métrique permet de lever ou d'abaisser les indices des tenseurs de l'espace de Minkowski

$$\left. \begin{aligned} a^{\mu} &= g^{\mu\nu} a_{\nu} \\ a_{\mu} &= g_{\mu\nu} a^{\nu} \end{aligned} \right\} a^0 = a_0, \quad a^i = -a_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

On définit les composantes contra-variantes  $C_j^{mm'}$  du tenseur métrique de l'espace  $\mathcal{K}_{2j+1}$  par la relation :

$$C_j^{mm'} = (\Gamma_j)^m_{m'}$$

Notons que la symétrie de la matrice  $\Gamma_j$  dépendant de  $j$ , on a

$$C_j^{mm'} = (-)^{2j} C_j^{m'm} \quad (7)$$

Les composantes covariantes  $C_{mm'}^j$  du tenseur métrique sont définies par

$$C_{mm'}^j C_j^{m'm''} = \delta^{m''}_{m'} \quad (8)$$

et on a

$$C_{mm'}^j = (-)^{2j} C_j^{mm'} = (-)^{j+m} \delta_{m, -m'} \quad (9)$$

Le tenseur métrique permet de lever ou d'abaisser les indices des tenseurs de l'espace  $\mathcal{K}_{2j+1}$ .

$$v_m = C_{mm'}^j v^{m'} = (-)^{j+m} v^{-m}$$

$$v^m = C_j^{mm'} v_{m'} = (-)^{j-m} v_{-m}$$

Note - Le tenseur métrique n'étant pas symétrique pour lever ou abaisser les indices il faut préciser la place de l'indice qui est sommé. Nous convenons de sommer sur le second indice du tenseur métrique.

2 - Symboles -3j.

2. 1. Définition et propriétés.

Les symboles -3j sont définis à partir des coefficients de Clebsch-Gordan.

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3) \quad (11)$$

Les propriétés des symboles -3j se déduisent de celles des coefficients de Clebsch-Gordan.

a) Le symbole est nul si les nombres  $j_\alpha$  ne satisfont pas la relation triangulaire :

$$|j_\alpha - j_\beta| \leq j_\gamma \leq j_\alpha + j_\beta, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Le symbole est nul si les nombres  $m_\alpha$  ne satisfont pas la relation

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0 \quad (13)$$

b) Le symbole -3j est invariant pour toute permutation circulaire (ou paire) des colonnes. Deux symboles qui se déduisent l'un de l'autre par une permutation impaire des colonnes sont égaux à la phase  $(-)^{j_1+j_2+j_3}$  près :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} = (-)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

De plus on a la propriété

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

2. 2. Symboles -3j covariants et contravariants.

Wigner a introduit le concept de symboles -3j covariants et contravariants. Le symbole -3j est un tenseur de l'espace produit tensoriel  $\mathcal{K}_{2j_1+1} \otimes \mathcal{K}_{2j_2+1} \otimes \mathcal{K}_{2j_3+1}$ . Dans chacun de ces espaces on a défini un tenseur métrique

$C_{j_\alpha}^{m_\alpha m'_\alpha}$  qui permet de montrer les indices des tenseurs. On définit de

cette façon le symbole -3j une fois contravariant :

$$\begin{pmatrix} m_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = C_{j_1}^{m_1 m'_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

On note que si on lève les trois indices on obtient, en utilisant (16)(13)(15)

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

### 2.3. Relations d'orthogonalité.

Les relations d'orthogonalité des coefficients de Clebsch-Gordan se traduisent de façon très simple sur les symboles  $-3j$  covariants et contravariants :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m'_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2j_3 + 1} \delta_{m_3}^{m'_3} \quad (18)$$

$$\sum_{j_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_1 & m'_2 & m_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1}^{m'_1} \delta_{m_2}^{m'_2} \quad (19)$$

### 2.4. Réduction du produit tensoriel de représentations du groupe des rotations.

Le produit tensoriel de représentations du groupe des rotations est réductible, on a :

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_{L=|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} D^{(L)} \quad (20)$$

Les éléments de la matrice unitaire d'entrelacement qui effectue la réduction sont les coefficients de Clebsch-Gordan. En utilisant la définition (11) on a :

$$D^{(j_1)}_{(R)} \begin{matrix} m_1 \\ m'_1 \end{matrix} D^{(j_2)}_{(R)} \begin{matrix} m_2 \\ m'_2 \end{matrix} = \sum_L (-)^{2L} (2L+1) \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & L \\ j_1 & j_2 & M \end{pmatrix} D^{(L)}_{(R)} \begin{matrix} M \\ M' \end{matrix} \begin{pmatrix} M' & j_1 & j_2 \\ L & m'_1 & m'_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

2.5. Propriétés et valeurs de certains symboles  $-3j$  particuliers.

De la propriété (15) on déduit

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ & & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{si } j_1 + j_2 + j_3 \text{ est impair.} \quad (22)$$

Si l'un des  $j_\alpha$  est nul, la valeur du symbole est simple :

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ & & \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-)^{j-m} (2j+1)^{-1/2}. \quad (23)$$

3 - Symboles  $-6j$ .

3.1. Définition et propriétés.

Le symbole  $-6j$  est défini comme le produit complètement contracté de quatre symboles  $-3j$  :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & n_2 & \ell_3 \\ j_1 & \ell_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 & n_3 & \ell_1 \\ j_2 & \ell_3 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 & n_1 & \ell_2 \\ j_3 & \ell_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Les propriétés des symboles  $-6j$  se déduisent de leur définition.

- a) Le symbole  $-6j$  est invariant pour toute permutation des colonnes.
- b) Le symbole  $-6j$  possède la propriété suivante

$$\begin{Bmatrix} j_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

- c) Le symbole  $-6j$  est nul si les nombres  $j_\alpha$  et  $\ell_\beta$  des quatre symboles  $-3j$  de la définition (24) ne satisfont pas les relations triangulaires (12).

3.2. Identités entre symboles  $-3j$  et  $-6j$ .

En étudiant la réduction du produit tensoriel de trois représentations du groupe des rotations on obtient l'identité :

$$(-)^{2\ell_2} \sum_{j_3} \binom{2j_3+1}{j_3} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & \ell_1 & n_2 \\ m_3 & n_1 & \ell_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & n_2 & \ell_3 \\ j_1 & \ell_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 & n_3 & \ell_1 \\ j_2 & \ell_3 & n_1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

et en utilisant (18) on en déduit

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & n_2 & \ell_3 \\ j_1 & \ell_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 & n_3 & \ell_1 \\ j_2 & \ell_3 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 & n_1 & \ell_2 \\ j_3 & \ell_1 & n_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

### 3.3. Cas particulier de symbole $-6j$ .

Lorsque l'un des  $j_\alpha$  est nul, le symbole  $-6j$  prend une valeur particulièrement simple :

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & j'_3 & j'_2 \end{Bmatrix} = (-)^{j_1+j_2+j_3} \left[ (2j_2+1)(2j_3+1) \right]^{-1/2} \delta_{j_3 j'_3} \delta_{j_2 j'_2} \quad (28)$$