

PARAMETRISATION DE LA MATRICE DENSITE
PARAMETRES MULTIPOLAIRES

Comme nous l'avons vu dans le chapitre I la matrice densité de polarisation d'une particule de spin j est une matrice hermitique, positive, de dimension $(2j+1) \times (2j+1)$, de trace 1. Elle est définie par $N = (2j+1)^2 - 1$ paramètres réels. Nous avons vu aussi qu'il existe une métrique naturelle sur l'espace euclidien ξ'_N des matrices densité. Par conséquent il est préférable de paramétrer les matrices densité en choisissant un système de coordonnées qui respecte cette métrique et dont l'origine est l'état non polarisé. Les N paramètres p_r ($r = 1, \dots, N$), sont les coordonnées du point ρ représentant la matrice dans ξ'_N . Le degré de polarisation est la distance de ρ à l'origine ρ_0 :

$$(d_\rho)^2 = \sum_{r=1}^N (p_r)^2 . \quad (1)$$

De plus, on doit se laisser guider dans le choix des paramètres par les propriétés de la matrice densité, en particulier par ses propriétés de transformation par le groupe des rotations. Dans ce chapitre nous passons en revue et nous discutons les deux systèmes de paramètres les plus couramment utilisés : les éléments $\rho_{k\ell}$ de la matrice densité et les paramètres multipolaires $t_M^{(L)}$. Puis nous proposons un nouveau choix de paramètres, les paramètres multipolaires réels $r_M^{(L)}$ qui sont une généralisation, pour un spin j quelconque, des composantes du vecteur de polarisation utilisé pour le spin $1/2$ (aussi appelé vecteur de Stokes).

1 - Les éléments de matrice densité.

On peut choisir de paramétrer la matrice densité ρ par ses éléments de matrice $\rho_{k\ell}$ ou par les parties réelles et imaginaires de ses éléments de matrice. Nous allons montrer que ce choix est malheureux car, d'une part il ne satisfait pas à la condition (1), d'autre part ces paramètres n'ont aucune propriété de transformation intéressante sous l'action du groupe des rotations.

1.1 - Les matrices $M_{k\ell}$.

Choisir de paramétrer la matrice densité par ses éléments de matrice, cela revient à développer la matrice densité ρ sous la forme :

$$\rho = \sum_{k,\ell} (M_{k\ell}^*) \rho_{k\ell} \quad (2)$$

$$k,\ell = -j, -j+1, \dots, j-1, j \quad (3)$$

où les matrices $M_{k\ell}^*$ sont les $(2j+1)^2$ matrices dont tous les éléments $(M_{k\ell}^*)_{mn}^m$ sont nuls, sauf l'élément $m = k, n = \ell$ qui est égal à 1, i.e. :

$$(M_{k\ell}^*)_{mn}^m = \delta_{km} \delta_{\ell n} \quad (4)$$

Par exemple pour le spin 1/2, les matrices $M_{k\ell}^*$ sont :

$$M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

et la décomposition (1) s'écrit :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rho_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Les propriétés des matrices $M_{k\ell}$ se déduisent immédiatement de leur définition (4) :

- i) les matrices $M_{k\ell}$ sont réelles,
- ii) les matrices M_{kk} sont diagonales,
- iii) les matrices $M_{k\ell}$ satisfont les relations :

$$M_{k\ell}^* = M_{k\ell}^T = M_{\ell k} \quad (7)$$

iv) L'ensemble des matrices $M_{k\ell}$ ne contient pas la matrice unité mais on a :

$$\sum_k M_{kk} = \mathbb{1} \quad (8)$$

v) Les matrices $(2j+1) \times (2j+1)$ complexes forment un espace de Hilbert complexe à $(2j+1)^2 = N+1$ dimensions $\mathfrak{H}_{(2j+1)^2}$. Le produit scalaire hermitien de deux matrices A et B est défini par :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr } A^* B. \quad (9)$$

Les $(2j+1)^2$ matrices $M_{k\ell}$ forment une base orthonormée de l'espace $\mathfrak{H}_{(2j+1)^2}$; en effet on vérifie que l'on a :

$$\langle M_{k\ell}, M_{k'\ell'} \rangle = \text{Tr } M_{k\ell}^* M_{k'\ell'} = \delta_{\ell k'} \delta_{\ell' l}. \quad (10)$$

1.2- Les paramètres complexes $\rho_{k\ell}$.

L'expression (2) représente le développement, à coefficients complexes, de la matrice ρ sur la base $M_{k\ell}^*$. En utilisant la propriété (10) on peut inverser la formule (2). On obtient les paramètres $\rho_{k\ell}$ en faisant le produit scalaire hermitien des $M_{k\ell}^*$ et de ρ :

$$\rho_{k\ell} = \langle M_{k\ell}^*, \rho \rangle = \text{Tr}(M_{k\ell}^* \rho) \quad (11)$$

Les propriétés de la matrice densité ρ et des matrices $M_{k\ell}$ impliquent un certain nombre de conditions sur les paramètres $\rho_{k\ell}$:

i) l'hermiticité de ρ ($\rho^* = \rho$) et la propriété (7) entraînent :

$$\rho_{k\ell} = \overline{\rho_{\ell k}}, \quad \rho_{kk} \text{ réels,} \quad (12)$$

ii) la propriété $\text{Tr } \rho = 1$ et la propriété (8) entraînent :

$$\sum_k \rho_{kk} = 1 \quad (13)$$

iii) La positivité de la matrice densité peut être exprimée algébriquement par des conditions sur le déterminant du tableau des $\rho_{k\ell}$:

$$\det(\rho_{k\ell}) \geq 0 \quad (14a)$$

$$\begin{cases} \det[\lambda \rho_{k\ell} + (1-\lambda)(\rho_0)_{k\ell}] \neq 0 \\ \forall \lambda \quad 0 \leq \lambda < 1 \end{cases} \quad (14b)$$

où ρ_0 est la matrice $\mathbb{1}/(2j+1)$, i. e., ses paramètres sont :

$$(\rho_0)_{k\ell} = \frac{1}{2j+1} \delta_{k\ell} \quad (15)$$

1.3 - Les difficultés des paramètres $\rho_{k\ell}$.

Nous avons vu au chapitre 1 que les matrices hermitiques $(2j+1) \times (2j+1)$ forment un espace euclidien \mathcal{E}_{N+1} de dimension $N+1 = (2j+1)^2$. Le produit scalaire euclidien de deux matrices ρ_1 et ρ_2 est défini par (I. 1. (41)) :

$$(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr} \rho_1 \rho_2 \quad (16)$$

Les matrices de cet espace qui ont trace 1 forment un sous-espace euclidien \mathcal{E}_N . Le degré de polarisation d_ρ de la matrice densité ρ est donné par la distance de ρ à ρ_0 , matrice densité de l'état non polarisé.

Nous allons montrer que le choix des paramètres $\rho_{k\ell}$ comme coordonnées de la matrice ρ dans l'espace \mathcal{E}_N pose beaucoup de difficultés.

a) Les paramètres $\rho_{k\ell}$ ($k \neq \ell$) sont complexes. En effet, les coefficients $\rho_{k\ell}$ du développement (2) sont les coefficients du développement d'une matrice hermitique ρ sur une base de matrices non hermitiques $M_{k\ell}^*$.

b) Les paramètres $\rho_{k\ell}$ ne sont pas des coordonnées orthonormales. Nous avons défini le degré de polarisation

$$(d_\rho)^2 = \frac{2j+1}{2j} (\rho - \rho_0, \rho - \rho_0). \quad (17)$$

En utilisant (2) et (10) on obtient

$$(d_\rho)^2 = \frac{2j+1}{2j} \sum_{k>\ell} (\rho_{kk} - \frac{1}{2j+1})^2 + 2 |\rho_{k\ell}|^2, \quad (18)$$

les paramètres diagonaux étant de plus reliés par

$$\sum_k \rho_{kk} = 1 \quad (19)$$

Si on introduit cette relation dans l'expression (18) et que l'on compare le résultat avec la forme (1) du degré de polarisation, on observe que les éléments de matrice ρ_k indépendants ne sont pas des paramètres orthonormaux.

c) De plus, dans les applications nous verrons que les conditions supplémentaires imposées à la matrice observée ρ pour les expériences les plus courantes introduisent certaines relations entre les N paramètres $\rho_{k\ell}$. La dimension de l'espace de polarisation observée est alors $N' = N - r$.

L'expression du degré de polarisation est fonction des N' paramètres indépendants, la forme du degré de polarisation devient alors très compliquée.

Il est préférable de choisir des paramètres tels que les r conditions supplémentaires se traduisent par l'annulation de r paramètres.

d) Le groupe des rotations agit sur l'espace \mathcal{C}_{N+1} de la manière suivante :

$$\rho \xrightarrow{R} \rho' = D^j(R) \rho D^j(R)^* \quad (20)$$

où $D^j(R)$ est la représentation irréductible de dimension $(2j+1)$ du groupe des rotations. Par conséquent les éléments de matrice $\rho_{k\ell}$ se transforment selon la représentation réductible $D^j \otimes \bar{D}^j$, produit tensoriel de représentations

$$\rho_{k\ell} \xrightarrow{R} \rho'_{k\ell} = \sum_{k'\ell'} \left(D^j(R)^k_{k'} \overline{D^j(R)^{\ell'}_{\ell}} \right) \rho_{k'\ell'} \quad (21)$$

Or, lorsqu'on étudie le moment angulaire ou la polarisation, il est toujours plus intéressant de considérer des quantités qui se transforment par rotation selon une représentation irréductible du groupe des rotations. C'est la raison pour laquelle depuis longtemps les physiciens qui s'occupaient de corrélations angulaires en physique nucléaire avaient choisi de paramétrer les matrices densité de polarisation par les tenseurs statistiques $t_M^{(L)}$ que l'on appelle maintenant paramètres multipolaires.

2 - Les paramètres multipolaires.

Les paramètres multipolaires $t_M^{(L)}$, L fixé, se transforment par rotation selon la représentation irréductible $D^L(R)$. Comme nous l'avons vu au chapitre I, la réduction du produit tensoriel (21) nous fournit une décomposition de l'espace \mathcal{E}_{N+1} en somme directe de sous-espaces invariants.

$$\mathcal{E}_{N+1} = \bigoplus_{L=0}^{2j} \mathcal{E}_{2L+1}^{(L)}, \quad (22)$$

et une décomposition de la matrice ρ en une somme (ordinaire) de matrices $\rho^{(L)}$:

$$\rho = \sum_{L=0}^{2j} \rho^{(L)} \quad (23)$$

que nous appelons les multipôles d'ordre 2^L .

Nous allons choisir une base orthogonale $T_M^{(L)}$ dans l'espace $\mathcal{E}^{(L)}$, les paramètres multipolaires $t_M^{(L)}$ sont les coordonnées de la matrice $\rho^{(L)}$ sur cette base.

De plus, en normalisant convenablement les parties réelles et imaginaires de $t_M^{(L)}$ nous construirons un ensemble de paramètres multipolaires réels, $r_M^{(L)}$, qui satisfont la condition (1).

2.1 - Les matrices $T_M^{(L)}$.

Les paramètres multipolaires $t_M^{(L)}$ sont les coefficients qui apparaissent dans le développement de la matrice densité :

$$\rho = \sum_{L=0}^{2j} \sum_{M=-L}^{+L} \frac{2L+1}{2j+1} (T_M^{(L)*}) t_M^{(L)} \quad (24)$$

où les matrices $T_M^{(L)}$ sont les $(2j+1)^2$ matrices dont les éléments sont des coefficients de Clebsch-Gordan :

$$(T_M^{(L)})_{jn}^m = \langle jm LM | jn \rangle \quad (25)$$

Par exemple pour le spin $j = \frac{1}{2}$, les matrices $T_M^{(L)}$ sont :

$$T_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{-1}^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

et la décomposition (24) s'écrit :

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t_0^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t_0^{(1)} + \frac{\sqrt{6}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t_1^{(1)} + \frac{\sqrt{6}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t_{-1}^{(1)}, \quad (27)$$

Les propriétés des matrices $T_M^{(L)}$ se déduisent directement de leur définition (25). Notons d'abord que l'on peut mettre en évidence la variance des différents indices magnétiques en réécrivant cette définition à l'aide des symboles $-3j$ de Wigner (voir appendice 1). On obtient :

$$(T_M^{(L)})_{n}^m = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} m & L & j \\ j & M & n \end{pmatrix} \quad (28)$$

Les propriétés des $T_M^{(L)}$ se déduisent alors immédiatement des propriétés des symboles $-3j$:

- i) les matrices $T_M^{(L)}$ sont réelles,
- ii) les matrices $T_0^{(L)}$ sont diagonales,
- iii) les matrices $T_M^{(L)}$ satisfont les relations :

$$T_M^{(L)*} = T_M^{(L)T} = (-)^M T_{-M}^{(L)}, \quad (29)$$

- iv) la matrice $T_0^{(0)}$ est égale à la matrice unité :

$$T_0^{(0)} = \uparrow. \quad (30)$$

- v) Les $(2j+1)^2$ matrices $T_M^{(L)}$ forment une base orthogonale, au sens du produit scalaire hermitien défini en (9), de l'espace de Hilbert $\mathcal{K}_{(2j+1)^2}$ des matrices $(2j+1) \times (2j+1)$ complexes. On a :

$$\langle T_M^{(L)}, T_{M'}^{(L')} \rangle = \text{Tr} (T_M^{(L)*} T_{M'}^{(L')}) = \frac{2j+1}{2L+1} \delta_{LL'} \delta_{MM'}. \quad (31)$$

- vi) Utilisant le tenseur $C_L^{MM'}$ de l'espace de Hilbert \mathcal{K}_{2L+1} (voir Appendice 1) on peut définir les matrices $T_{(L)}^M$:

$$T_{(L)}^M = C_{L}^{MM'} T_{M'}^{(L)} = (-)^{L-M} T_{-M}^{(L)} \quad (32)$$

et en utilisant (29) on a :

$$T_{(L)}^M = (-)^L T_M^{(L)*} \quad (33)$$

vii) Les matrices $T_M^{(L)}$ ont été définies par leurs éléments qui sont des nombres (coefficients de Clebsch-Gordan). Elles ne sont donc pas attachées à un système de référence ou de quantification particulier. On peut cependant étudier l'action du groupe des rotations sur ces matrices. Le groupe des rotations agit de la manière suivante :

$$T_M^{(L)} \xrightarrow{R} R_{T_M^{(L)}} = D^j(R) T_M^{(L)} D^j(R)^{-1} \quad (34)$$

En réduisant le produit tensoriel des représentations (voir I. A1 (21)) on obtient :

$$R_{T_M^{(L)}} = T_{M'}^{(L)} D^L(R)_{M'}^M \quad (35)$$

c'est-à-dire que pour L donné les $T_M^{(L)}$ forment une base du sous-espace de $\mathcal{K}_{(2j+1)^2}$ sur lequel agit la représentation irréductible $D^L(R)$. La loi de transformation des matrices $T_{(L)}^M$ s'écrit :

$$R_{T_{(L)}^M} = D^L(R^{-1})_{M'}^M T_{(L)}^{M'} \quad (36)$$

ou, ce qui est équivalent :

$$R_{T_M^{(L)*}} = \sum_{M'} D^L(R^{-1})_{M'}^M T_{M'}^{(L)*} \quad (37)$$

2.2- Les paramètres multipolaires $t_M^{(L)}$.

L'expression (24) représente le développement à coefficients complexes de la matrice ρ sur la base des $T_M^{(L)*}$. En utilisant la propriété (31) on peut inverser la formule (24). On obtient les paramètres $t_M^{(L)}$ en faisant le produit scalaire hermitien des $T_M^{(L)*}$ et de ρ :

$$t_M^{(L)} = \langle T_M^{(L)*} ; \rho \rangle = \text{Tr} (T_M^{(L)} \rho) \quad (38)$$

i. e. :

$$t_M^{(L)} = \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} n & L & j \\ j & M & m \end{pmatrix} \rho_{mn}^m \quad (39)$$

Les propriétés de la matrice ρ et des matrices $T_M^{(L)}$ impliquent un certain nombre de conditions sur les paramètres $t_M^{(L)}$:

i) l'hermiticité de ρ ($\rho = \rho^*$) et la propriété (29) entraînent :

$$\overline{t_M^{(L)}} = (-)^M t_{-M}^{(L)}, \quad (40a)$$

$$t_0^{(L)} \text{ réels}, \quad (40b)$$

ii) la propriété $\text{Tr } \rho = 1$ et la propriété (30) entraînent :

$$t_0^{(0)} = 1. \quad (41)$$

iii) La positivité de la matrice densité peut être exprimée algébriquement par des conditions sur les paramètres $t_M^{(L)}$. On obtient ces conditions à partir des conditions sur les éléments de matrice densité $\rho_{k\ell}$, Eq.(14), et de la relation (24) (voir P. Minnaert, Phys. Rev. 151 (1966) 1306).

iv) Le groupe des rotations agit sur la matrice densité ρ de la manière suivante :

$$\rho \xrightarrow{R} \rho' = D^j(R) \rho D^j(R)^{-1} \quad (42)$$

En utilisant la loi de transformation (36) on montre que les paramètres $t_M^{(L)}$ de ρ' sont reliés aux paramètres $t_M^{(L)}$ de ρ par la formule :

$$t_M'^{(L)} = t_{M'}^{(L)} D^L(R^{-1})_{M'}^M \quad (43)$$

Les paramètres $t_M^{(L)}$ pour L fixé sont donc les composantes d'un tenseur $\rho^{(L)}$ irréductible pour l'action du groupe des rotations sur \mathcal{K}_{2j+1} .

Dans la décomposition

$$\rho = \sum_{L=0}^{2j} \rho^{(L)}$$

la matrice $\rho^{(L)}$ est appelée multipole d'ordre 2^L de ρ et les $t_M^{(L)}$ sont les $2L+1$ paramètres multipolaires correspondants. Pour $L=1$ on a un dipôle. Les trois paramètres $t_M^{(1)}$ du dipôle sont souvent considérés comme les composantes sphériques d'un vecteur réel de l'espace à trois dimensions. C'est le vecteur de polarisation de Stokes.

v) Le degré de polarisation se calcule facilement en fonction des $t_M^{(L)}$.

Nous avons défini :

$$(d_{\rho})^2 = \frac{2j+1}{2j} (\rho - \rho_0, \rho - \rho_0) = \frac{2j+1}{2j} (\text{Tr } \rho^2 - \frac{1}{2j+1}) \quad (44)$$

En utilisant le développement (24), la propriété d'orthogonalité (31) et la propriété (41) on obtient :

$$(d_{\rho})^2 = \sum_{L=1}^{2j} \sum_{M=-L}^{+L} \frac{2L+1}{2j} |t_M^{(L)}|^2 \quad (45)$$

En utilisant la propriété (40a) on peut réécrire $(d_{\rho})^2$ sous la forme :

$$(d_{\rho})^2 = \sum_{L=1}^{2j} \frac{2L+1}{2j} (t_0^{(L)})^2 + \sum_{L=1}^{2j} \sum_{M=-L}^{+L} \frac{2(2L+1)}{2j} \left[(\text{Re } t_M^{(L)})^2 + (\text{Im } t_M^{(L)})^2 \right] \quad (45')$$

En comparant cette expression à la forme (1) on voit que les parties réelles et imaginaires des $t_M^{(L)}$ sont toutes orthogonales entre elles puisque $(d_{\rho})^2$ est la somme des carrés de ces composantes, mais elles ne sont pas normalisées. Dans le paragraphe suivant nous construisons, à partir des $t_M^{(L)}$, un ensemble de paramètres réels orthonormalisés.

2.3 - Les paramètres réels $r_M^{(L)}$, les matrices $Q_M^{(L)}$.

Les coefficients $t_M^{(L)}$ du développement (24) sont complexes car on développe la matrice hermitique ρ sur la base des matrices non hermitiques $T_M^{(L)}$. L'expression (45') du degré de polarisation suggère de considérer les paramètres réels $r_M^{(L)}$, construits à partir des $t_M^{(L)}$ de la manière suivante :

$$r_0^{(L)} = \sqrt{\frac{2L+1}{2j}} t_0^{(L)}, \quad (46a)$$

$$r_M^{(L)} = (-)^M \sqrt{\frac{2L+1}{j}} \text{Re } t_M^{(L)}, \quad (46b)$$

$$r_{-M}^{(L)} = (-)^M \sqrt{\frac{2L+1}{j}} \text{Im } t_M^{(L)}, \quad (46c)$$

$$L \neq 0, \quad M > 0. \quad (46d)$$

En effet avec ces définitions (45') devient :

$$(d_\rho)^2 = \sum_{L=1}^{2j} \sum_{M=-L}^{+L} (r_M^{(L)})^2, \quad (47)$$

les paramètres $r_M^{(L)}$ sont bien orthonormalisés. Ces paramètres réels qui caractérisent la polarisation d'un ensemble de particules, peuvent être définis comme valeurs moyennes de certaines observables de polarisation $Q_M^{(L)}$:

$$r_M^{(L)} = \langle Q_M^{(L)} \rangle = \text{Tr}(Q_M^{(L)} \rho) \quad (48)$$

Les observables $Q_M^{(L)}$ sont représentées par des matrices hermitiques.

En comparant les formules (33) et (46) on voit que les matrices hermitiques $Q_M^{(L)}$ peuvent être construites à partir des $T_M^{(L)}$:

$$Q_0^{(L)} = \sqrt{\frac{2L+1}{2j}} T_0^{(L)}, \quad (49a)$$

$$Q_M^{(L)} = (-)^M \sqrt{\frac{2L+1}{4j}} (T_M^{(L)} + T_M^{(L)*}), \quad (49b)$$

$$Q_{-M}^{(L)} = (-)^M \sqrt{\frac{2L+1}{4j}} (-i)(T_M^{(L)} - T_M^{(L)*}), \quad (49c)$$

$$L \neq 0, \quad M > 0. \quad (49d)$$

Les matrices $Q_M^{(L)}$ sont orthogonales. Partant de (31) on vérifie que l'on a :

$$(Q_M^{(L)}, Q_{M'}^{(L')}) = \text{Tr}(Q_M^{(L)} Q_{M'}^{(L')}) = \frac{2j+1}{2j} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (50)$$

Les paramètres $r_M^{(L)}$ sont les coefficients réels du développement de la matrice ρ sur cette base hermitique. Ce développement s'écrit :

$$\rho = \frac{1}{2j+1} + \frac{2j}{2j+1} \sum_{L=1}^{2j} \sum_{M=-L}^{+L} Q_M^{(L)} r_M^{(L)} \quad (51)$$

Les matrices $Q_M^{(L)}$ et les paramètres $r_M^{(L)}$ sont des généralisations à un spin quelconque, des matrices de Pauli et du vecteur de polarisation \vec{P} . En effet, en utilisant (26) et (49) on obtient pour $j = 1/2$:

$$Q_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \tau_3, \quad Q_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1$$

$$Q_{-1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \tau_2$$
(52)

et si on définit les composantes du vecteur \vec{P} :

$$P_3 = r_0^{(1)}, \quad P_1 = r_1^{(1)}, \quad P_2 = r_{-1}^{(1)},$$
(53)

la formule (51) s'écrit :

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{\tau} \cdot \vec{P}),$$
(54)

qui est bien la forme classique pour la matrice densité de spin $1/2$.

De même la formule (48) est une généralisation de la formule bien connue

$$\vec{P} = \langle \vec{\tau} \rangle = \text{Tr}(\vec{\tau} \rho),$$
(55)

et la formule (47) est une généralisation de

$$d_\rho = |\vec{P}|$$
(56)

Enfin les conditions de positivité sur les paramètres $r_M^{(L)}$, que nous calculerons pour chaque cas particulier de spin dans la deuxième partie, sont une généralisation de la condition :

$$0 \leq |\vec{P}| \leq 1$$
(57)

qui exprime que le domaine de \vec{P} est la sphère de Poincaré.

La table 1 donne la représentation des matrices $Q_M^{(L)}$ pour les spins $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

Table 1.- Representation of the observables Q_M^L for $j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

(a) $j = \frac{1}{2}$
 $L = 1$

$$Q_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^1 = \begin{bmatrix} \cdot & 1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-1}^1 = i \begin{bmatrix} \cdot & -1 \\ 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

(b) $j = 1$
 $L = 1, 2$

$$Q_0^1 = \sqrt{\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^1 = \sqrt{\frac{3}{8}} \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-1}^1 = i \sqrt{\frac{3}{8}} \begin{bmatrix} \cdot & -1 & \cdot \\ 1 & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_0^2 = \sqrt{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^2 = \sqrt{\frac{3}{8}} \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & -1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-1}^2 = i \sqrt{\frac{3}{8}} \begin{bmatrix} \cdot & -1 & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & -1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_2^2 = \sqrt{\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-2}^2 = i \sqrt{\frac{3}{4}} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

(c)

$$j = \frac{3}{2}$$

$$L = 1, 2, 3$$

$$Q_0^1 = \sqrt{\frac{1}{15}} \begin{bmatrix} 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -3 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^1 = \sqrt{\frac{1}{15}} \begin{bmatrix} \cdot & \sqrt{3} & \cdot & \cdot \\ \sqrt{3} & \cdot & 2 & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \sqrt{3} \\ \cdot & \cdot & \sqrt{3} & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} \cdot & -\sqrt{3} & \cdot & \cdot \\ \sqrt{3} & \cdot & -2 & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & -\sqrt{3} \\ \cdot & \cdot & \sqrt{3} & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_0^2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-1}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_2^2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-2}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_0^3 = \sqrt{\frac{1}{15}} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1^3 = \sqrt{\frac{2}{15}} \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & -\sqrt{3} & \cdot \\ \cdot & -\sqrt{3} & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-1}^3 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \sqrt{3} & \cdot \\ \cdot & -\sqrt{3} & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_2^3 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-2}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_3^3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$Q_{-3}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

(a₁)

$j = 2$

$k = 1, 2, 3$

$Q_0^1 = \sqrt{\frac{1}{6}}$

2
.	1	.	.	.
.	.	0	.	.
.	.	.	-1	.
.	.	.	.	-2

$Q_1^1 = \sqrt{\frac{1}{16}}$

.	$\sqrt{2}$.	.	.
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$.	.	.
.	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$.	.
.	.	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$.
.	.	.	$\sqrt{2}$.

$Q_{-1}^1 = 1 \sqrt{\frac{1}{16}}$

.	$-\sqrt{2}$.	.	.
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$.	.	.
.	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$.	.
.	.	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$.
.	.	.	$\sqrt{2}$.

$Q_0^2 = \sqrt{\frac{5}{56}}$

2
.	-1	.	.	.
.	.	-2	.	.
.	.	.	-1	.
.	.	.	.	2

$Q_1^2 = \sqrt{\frac{5}{112}}$

.	$\sqrt{6}$.	.	.
$\sqrt{6}$	1	.	.	.
.	1	-1	.	.
.	.	-1	$-\sqrt{6}$.
.	.	.	$-\sqrt{6}$.

$Q_{-1}^2 = 1 \sqrt{\frac{5}{112}}$

.	$-\sqrt{6}$.	.	.
$\sqrt{6}$	-1	.	.	.
.	1	1	.	.
.	.	-1	$\sqrt{6}$.
.	.	.	$-\sqrt{6}$.

$Q_2^2 = \sqrt{\frac{5}{56}}$

.	.	$\sqrt{2}$.	.
.	.	.	$\sqrt{3}$.
$\sqrt{2}$.	.	.	$\sqrt{2}$
.	$\sqrt{3}$.	.	.
.	.	$\sqrt{2}$.	.

$Q_{-2}^2 = 1 \sqrt{\frac{5}{56}}$

.	.	$-\sqrt{2}$.	.
.	.	.	$-\sqrt{3}$.
$\sqrt{2}$.	.	.	$-\sqrt{2}$
.	$\sqrt{3}$.	.	.
.	.	$\sqrt{2}$.	.

$Q_0^3 = \sqrt{\frac{1}{6}}$

1
.	-2	.	.	.
.	.	0	.	.
.	.	.	2	.
.	.	.	.	-1

$Q_1^3 = \sqrt{\frac{1}{16}}$

.	$\sqrt{3}$.	.	.
$\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$.	.	.
.	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$.	.
.	.	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$.
.	.	.	$\sqrt{3}$.

$Q_{-1}^3 = 1 \sqrt{\frac{1}{16}}$

.	$-\sqrt{3}$.	.	.
$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$.	.	.
.	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$.	.
.	.	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$.
.	.	.	$\sqrt{3}$.

$Q_2^3 = \sqrt{\frac{5}{16}}$

.	.	1	.	.
.	.	.	0	.
1	.	.	.	-1
.	0	.	.	.
.	.	-1	.	.

$Q_{-2}^3 = 1 \sqrt{\frac{5}{16}}$

.	.	-1	.	.
.	.	.	0	.
1	.	.	.	1
.	0	.	.	.
.	.	-1	.	.

$Q_3^3 = \sqrt{\frac{5}{16}}$

.	.	.	1	.
.	.	.	.	1
.
1
.	1	.	.	.

$Q_{-3}^3 = 1 \sqrt{\frac{5}{16}}$

.	.	.	-1	.
.	.	.	.	-1
.
1
.	1	.	.	.

(a₂)

$j = 2$

$L = 4$

$Q_0^4 = \sqrt{\frac{1}{56}}$

1
.	-4	.	.	.
.	.	6	.	.
.	.	.	-4	.
.	.	.	.	1

$Q_1^4 = \sqrt{\frac{5}{112}}$

.	1	.	.	.
1	.	$-\sqrt{6}$.	.
.	$-\sqrt{6}$.	$\sqrt{6}$.
.	.	$\sqrt{6}$.	-1
.	.	.	-1	.

$Q_{-1}^4 = i \sqrt{\frac{5}{112}}$

.	-1	.	.	.
1	.	$\sqrt{6}$.	.
.	$-\sqrt{6}$.	$-\sqrt{6}$.
.	.	$\sqrt{6}$.	1
.	.	.	-1	.

$Q_2^4 = \sqrt{\frac{5}{112}}$

.	.	$\sqrt{3}$.	.
.	.	.	$-\sqrt{8}$.
$\sqrt{3}$.	.	.	$\sqrt{3}$
.	$-\sqrt{8}$.	.	.
.	.	$\sqrt{3}$.	.

$Q_{-2}^4 = i \sqrt{\frac{5}{112}}$

.	.	$-\sqrt{3}$.	.
.	.	.	$\sqrt{8}$.
$\sqrt{3}$.	.	.	$-\sqrt{3}$
.	$-\sqrt{8}$.	.	.
.	.	$\sqrt{3}$.	.

$Q_3^4 = \sqrt{\frac{5}{16}}$

.	.	.	1	.
.	.	.	-1	.
.
1
.	-1	.	.	.

$Q_{-3}^4 = i \sqrt{\frac{5}{16}}$

.	.	.	-1	.
.	.	.	1	.
.
1
.	-1	.	.	.

$Q_4^4 = \sqrt{\frac{5}{8}}$

.	.	.	.	1
.
.
.
1

$Q_{-4}^4 = i \sqrt{\frac{5}{8}}$

.	.	.	.	-1
.
.
.
1

3 - Conclusion. Choix des paramètres $r_M^{(L)}$.

Dans ce chapitre nous avons revu et discuté les deux systèmes de paramètres les plus couramment utilisés : les $\rho_{k\ell}$ et les $t_M^{(L)}$, et nous avons introduit un nouveau système de paramètres, les paramètres $r_M^{(L)}$.

Ces paramètres multipolaires réels $r_M^{(L)}$ nous semblent être un bon choix de paramètres pour la matrice densité de polarisation ρ . D'une part ils sont les coordonnées de ρ pour la base orthonormée $Q_M^{(L)}$ de l'espace euclidien \mathcal{E}_N des matrices de polarisation ainsi que des différents sous-espaces de \mathcal{E}_N (symétrie B, polarisation paire) que nous avons à introduire dans les applications pratiques. D'autre part les paramètres $r_M^{(L)}$, comme les paramètres multipolaires $t_M^{(L)}$, ont de bonnes propriétés de transformation pour le groupe des rotations. Enfin les paramètres $r_M^{(L)}$ sont une généralisation d'une paramétrisation universellement acceptée dans le cas du spin 1/2.

Dans la suite, pour le calcul des distributions angulaires où les propriétés de transformations par le groupe des rotations sont essentielles, nous utiliserons les paramètres multipolaires $t_M^{(L)}$ directement reliés au développement de la distribution angulaire sur la base des harmoniques sphériques[†], mais lorsqu'il s'agira de représenter concrètement les mesures de polarisation, c'est-à-dire des nombres réels, nous utiliserons les paramètres réels ortho-normalisés $r_M^{(L)}$.

[†] Nous ne voulons pas bousculer la tradition qui veut que l'on développe les distributions angulaires réelles sur une base de fonctions orthogonales complexes.

Chapitre 3 :

CONDITIONS DE PRODUCTION

Le corps de ce chapitre est constitué par l'appendice I. A3 qui paraîtra sous peu dans le troisième fascicule de "Polarization density matrix". Il étudie les conditions imposées par la conservation de la parité dans certaines situations expérimentales (e. g. cible et faisceau non polarisés) appelées ici B-symétrie et par le rang de la matrice densité initiale. Auparavant, dans l'appendice A. 2, nous étudions les choix possibles et les choix traditionnels de systèmes de référence covariants, liés à la réaction. L'expression des conditions de production varie en fonction de ce choix. Pour finir, et comme illustration simple de ce chapitre et du suivant, nous donnons un appendice A4 sur "les symétries discrètes PTC". Il s'agit d'un extrait d'un cours fait par l'un de nous (L. M.) en plusieurs occasions depuis 1957 (violation de la parité). Bien que n'ayant pas été fait à Gif, il répond à de simples questions posées au cours des discussions et il est une application de la structure des probabilités de transition donnée dans l'appendice I. A3 (équation 6)

$$w(1,2) = \text{Tr} \rho_2 S \rho_1 S^*$$

que nous appelons dans ces notes λ_{12} , la forme implicite des ρ étant l'équation (56) du chapitre 1.

Extraits de la première partie, fascicule 1, de

Polarization density matrix.

A.2. The choice of frame, helicity and transversity.

7. COVARIANT FRAMES.

One tetrad must be chosen for each spinning particle. By convention this tetrad will always be right-handed (see 14'), i. e.,

$$\det(\underline{p}, \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{n}^{(3)}) = m > 0, \quad (54)$$

and $\underline{n}^{(3)}$ will be chosen as quantization axis. Hence, to specify a tetrad, one has to choose only two of their three vectors $\underline{n}^{(i)}$ orthogonal to \underline{p} , e. g., $\underline{n}^{(2)}$ and $\underline{n}^{(3)}$. One could publish with the experimental results a drawing of the laboratory representing also the chosen axis! It is more customary to fix these two unit vectors in a covariant way, i. e., as function of the four-momenta of the other particles in the same reaction. Let i be the label of the particle whose tetrad we want to fix. In order to define these unit vectors orthogonal to \underline{p}_i , we will consider pairs $\underline{p}_i, \underline{p}_j$, and triplets $\underline{p}_i, \underline{p}_k, \underline{p}_l$ of linearly independent four-momenta (the latter is only possible for reactions involving at least four particles!). We call a k -plane the linear subspace generated by k such linearly independent vectors.

A two-plane which contains a time like vector, \underline{p}_i , does also contain space like vectors; we will call it a hyperbolic two-plane. We can define such a two-plane $\underline{p}_i, \underline{p}_j$, by choosing another particle j (we assume that particles i and j are not relatively at rest). In this two-plane we can define the space like unit vector

$$\underline{q}_i(j) = \frac{1}{\text{sh}\varphi_{ij}} (\hat{\underline{p}}_i \text{ch}\varphi_{ij} - \hat{\underline{p}}_j), \quad (55)$$

where

$$\hat{\underline{p}}_i = \underline{p}_i/m_i, \quad \text{ch}\varphi_{ij} = \hat{\underline{p}}_i \cdot \hat{\underline{p}}_j, \quad \text{and} \quad \text{sh}\varphi_{ij} > 0. \quad (55')$$

Then \hat{p}_i and $q_i(j)$ form an orthonormal basis of the two-plane

$$\hat{p}_i \cdot q_i(j) = 0 \quad , \quad \hat{p}_i^2 = 1 \quad , \quad q_i(j)^2 = -1. \quad (56)$$

We could consider two such orthonormal basis related by

$$\hat{p}_i \cdot \hat{p}_j = q_i(j) \cdot q_j(i) = \text{ch}\varphi_{ij} \quad , \quad (57)$$

$$\hat{p}_i \cdot q_j(i) = q_i(j) \cdot \hat{p}_j = \text{sh}\varphi_{ij} \quad . \quad (57')$$

As function of the invariants

$$m_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2 \quad (58)$$

we can write

$$\text{ch}\varphi_{ij} = (m_{ij}^2 - m_i^2 - m_j^2)/2m_i m_j \quad , \quad (59)$$

and

$$\text{sh}\varphi_{ij} = \Delta(m_{ij}^2, m_i^2, m_j^2)^{1/2}/2m_i m_j \quad , \quad (60)$$

with the notation

$$\Delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx. \quad (60')$$

A three-plane containing a time like vector, p_i , can be fixed by choosing two other four-momenta p_k, p_ℓ (we assume p_i, p_k , and p_ℓ linearly independent, i. e., in the system of one of these three particles at rest, the other two are not colinear). One can define, as another space like unit vector, the normal \underline{n} to such a three-plane p_i, p_k, p_ℓ , by

$$\underline{n} \cdot p_i = 0 \quad , \quad \underline{n} \cdot p_k = 0 \quad , \quad \underline{n} \cdot p_\ell = 0 \quad , \quad \underline{n}^2 = -1. \quad (61)$$

The ambiguity of its sign can be removed by

$$\det(\underline{n}, p_i, p_k, p_\ell) > 0. \quad (61')$$

We could now make a general convention for fixing the tetrad of any final particle i , produced in a collision between a beam particle b and a target particle t . For instance : we choose the two unit vectors $q_i(b)$ and \underline{n} , the normal to the three-plane p_i, p_b, p_t with $\det(\underline{n}, p_i, p_b, p_t) > 0$, as the vectors $\underline{n}^{(2)}$ and $\underline{n}^{(3)}$ of the tetrad. However this convention is not the most natural for some frequent type of reactions, which we study in the next paragraph.

8. TRANSVERSITY AND HELICITY FRAMES IN s-, t-, and u-channels.

We will study here in detail only the case of two-body reactions with four-momenta

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4, \quad (62)$$

in which a natural correspondence can be established between one initial and one final particle,

$$1 \leftrightarrow 3, \text{ and } 2 \leftrightarrow 4,$$

having the same baryonic, and/or leptonic, and/or electric charge.

These reactions define (except in the colinear case of forward or backward scattering) one three-plane, and six two-planes, three of them containing a given particle. The two-planes have the following names :

$$\begin{aligned} \text{s-channel two-planes } & p_1, p_2 \text{ and } p_3, p_4 \\ \text{t-channel two-planes } & p_1, p_3 \text{ and } p_2, p_4 \\ \text{u-channel two-planes } & p_1, p_4 \text{ and } p_2, p_3. \end{aligned} \quad (63)$$

We will use the letters a, b... as a symbol for any of these three channels, and call "ai" the particle associated to particle i in channel a. Explicitely, for

$$i = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \quad (64)$$

we have

$$\begin{aligned} \text{si} &= 2 \ 1 \ 4 \ 3 \\ \text{ti} &= 3 \ 4 \ 1 \ 2 \\ \text{ui} &= 4 \ 3 \ 2 \ 1. \end{aligned} \quad (64')$$

As usual, we will also call s, t and u the kinematical invariants corresponding to these three channels. They can be written for any i :

$$\begin{aligned} s &= (p_i + p_{si})^2 \\ t &= (p_i - p_{ti})^2 \\ u &= (p_i - p_{ui})^2 \end{aligned} \quad (65)$$

One sign convention must be made for the normal \underline{n} to the reaction three-plane (see expression 61'). For this kind of reactions we shall always use the nearly standard "Basel convention" (Basel-61) :

$$\det(p_1 + p_2, p_1, p_3, \underline{n}) = \det(p_1 + p_2, p_2, p_4, \underline{n}) > 0, \quad (66)$$

i. e. ,

$$\det(\underline{n}, \underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3) > 0 . \quad (66')$$

In the center of mass system, i. e. , in the rest frame of $\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \underline{p}_3 + \underline{p}_4$, expression (66) means that $\vec{p}_1, \vec{p}_3, \vec{n}$ and $\vec{p}_2, \vec{p}_4, \vec{n}$ are right handed trihedra :

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_3 \cdot \vec{n} = \vec{p}_2 \times \vec{p}_4 \cdot \vec{n} > 0 \quad (66'')$$

We insist again that conventions are arbitrary but must be specified in each self-contained publication ! Let us review here some possible conventions.

The transversity tetrad, associated to a particle i and a channel a , is defined by choosing the quantization vector $\underline{n}^{(3)}$, up to a sign η , along the normal \underline{n} :

$$T_{a \ i}^{n \ (3)} = T_{a \ i}^{\eta} \underline{n} . \quad (67)$$

The vector $\underline{n}^{(2)}$ is chosen in the corresponding a-channel two-plane, and fixed by another sign ϵ :

$$T_{a \ i}^{n \ (2)} = T_{a \ i}^{\epsilon} \underline{q}_i(ai) . \quad (67')$$

The helicity tetrad associated to the particle i and the channel a is defined on the contrary with the quantization vector $\underline{n}^{(3)}$ in the corresponding a-channel two-plane, and the vector $\underline{n}^{(2)}$ along the normal \underline{n} . These vectors are fixed by two new signs η and ϵ :

$$H_{a \ i}^{n \ (2)} = H_{a \ i}^{\eta} \underline{n} , \quad (68)$$

$$H_{a \ i}^{n \ (3)} = H_{a \ i}^{\epsilon} \underline{q}_i(ai) . \quad (68')$$

It might be useful to prepare a table of the choice of the forty-eight signs $T_{a \ i}^{\eta}, H_{a \ i}^{\eta}, T_{a \ i}^{\epsilon}, H_{a \ i}^{\epsilon}$ made in different papers by the same or by different authors. We intend to do it. Let us just remark here that the most frequently used conventions for s-helicity (Jacob-Wick-59) and t-helicity (Gottfried-Jackson-64) correspond to opposite choices for the $H_{a \ i}^{\epsilon}$'s. For Jacob and Wick $H_{s \ i}^{n \ (3)}$ is along \underline{p}_i in the center of mass frame, i. e. , for

$\vec{p}_i + \vec{p}_{si} = 0$; as equation (55) shows, this means $\frac{H}{s}\epsilon = +1$. For Gottfried and Jackson, $\frac{H}{t}n_i^{(3)}$ is along \vec{p}_{ti} in the rest frame of particle i , i. e. , for $\vec{p}_i = 0$; this means $\frac{H}{t}\epsilon = -1$.

In this work we make the following conventions :

- a) The signs T_η , H_η , T_ϵ , and H_ϵ are independent of the particle i and of the channel a .
- b) We want the two tetrads T and H of a given particle and a given channel to have the same vector $\underline{n}^{(1)}$, i. e. ,

$$T_{\underline{n}}(1) = H_{\underline{n}}(1) . \quad (69)$$

This is equivalent to

$$T_\eta \cdot H_\eta \cdot T_\epsilon \cdot H_\epsilon = -1 . \quad (69')$$

- c) We extend the Basel convention to the basis vector along the normal in each tetrad, i. e. ,

$$T_\eta = H_\eta = +1 . \quad (70)$$

Note that conventions a), b), and c) still leave one arbitrary sign :

$$\epsilon = H_\epsilon = -T_\epsilon \quad (71)$$

Conventions a) and b) are natural and happily the most common in the literature. The Basel convention c) is more and more adopted. Thus for instance, Cohen-Tannoudji - Morel - Navelet - 68 adopt the same conventions and fix $\epsilon = +1$. However, as already pointed out, widespread conventions differ by the sign of ϵ . So we will keep this sign not fixed, and include ϵ in our formulæ when necessary. We took this decision because, as a matter of fact, most of our formulæ are independent of ϵ . Let us see two examples :

A transversity tetrad is transformed in the corresponding helicity tetrad by a "rotation" of $+\frac{\pi}{2}$ around their common $\underline{n}^{(1)}$ vector. This is a consequence of convention b) and c), since the sign of this rotation angle is given by :

$$\frac{1}{m} \det(\underline{p}, \underline{n}^{(1)}, T_{\underline{n}}^{(2)}, H_{\underline{n}}^{(2)}) = \frac{1}{m} \det(\underline{p}, \underline{n}^{(1)}, T_{\underline{n}}^{(3)}, H_{\underline{n}}^{(3)}) = H_\eta T_\eta = -H_\epsilon T_\epsilon = +1 \quad (72)$$

The crossing angle, to be studied in the next paragraph, is also independent of ϵ . This can be seen in equations (75) and (76) which contain two vectors $T_{\underline{n}}^{(2)}$ or $H_{\underline{n}}^{(3)}$ corresponding to different channels. Of course we suppose, according to convention a), the same sign ϵ for all channels.

To summarize, for the four particles and the three channels we fix the transversity tetrad by

$$T_{\underline{n}_i}^{(3)} = \underline{n}_i \quad , \quad T_{\underline{n}_i}^{(2)} = -\epsilon \underline{q}_i(ai) \quad , \quad (73)$$

and the helicity tetrad by

$$H_{\underline{n}_i}^{(2)} = \underline{n}_i \quad , \quad H_{\underline{n}_i}^{(3)} = \epsilon \underline{q}_i(ai) \quad , \quad (74)$$

where \underline{n}_i is the "Basel normal" (see equations (66) and $\underline{q}_i(ai)$ is defined in (55) and (64'). The sign ϵ will generally not appear in our formulæ, but it should be fixed in every experimental paper measuring odd multipole polarization.

9. THE CROSSING ANGLE.

The transformation between two transversity (or helicity) frames corresponding to the same particle i and different channels a and b , will be a "rotation" around the normal \underline{n}_i which brings the a -channel two-plane into the b -channel two-plane. Let us call $\Psi_{i,ba}$ this crossing angle. From our sign conventions a) and c), one can use indifferently the T or the H tetrad for its definition. Indeed

$$\cos \Psi_{i,ba} = -\frac{T_{\underline{n}_i}^{(2)}}{a_i} \cdot \frac{T_{\underline{n}_i}^{(2)}}{b_i} = -\frac{H_{\underline{n}_i}^{(3)}}{a_i} \cdot \frac{H_{\underline{n}_i}^{(3)}}{b_i} \quad , \quad (75)$$

$$\sin \Psi_{i,ba} = \frac{1}{m_i} \det(\underline{p}_i, \underline{n}_i, \frac{T_{\underline{n}_i}^{(2)}}{a_i}, \frac{T_{\underline{n}_i}^{(2)}}{b_i}) = \frac{1}{m_i} \det(\underline{p}_i, \underline{n}_i, \frac{H_{\underline{n}_i}^{(3)}}{a_i}, \frac{H_{\underline{n}_i}^{(3)}}{b_i}) \quad (76)$$

(we recall that $\underline{n}_i = \frac{T_{\underline{n}_i}^{(3)}}{c_i} = \frac{H_{\underline{n}_i}^{(2)}}{c_i}$ for all i , all c).

From our conventions in (73) or (74) and the definition of the vectors $\underline{q}_i(j)$ in (55) to (60') one obtains :

$$\begin{aligned} \cos \Psi_{i,ba} &= -\underline{q}_i(ai) \cdot \underline{q}_i(bi) = \left[\text{ch}\varphi_{i,ai} \text{ch}\varphi_{i,bi} - \text{ch}\varphi_{ai,bi} \right] / \text{sh}\varphi_{i,ai} \text{sh}\varphi_{i,bi} = \\ &= \frac{(m_{i,ai}^2 - m_i^2 - m_{ai}^2)(m_{i,bi}^2 - m_i^2 - m_{bi}^2) - 2m_i^2(m_{ai,bi}^2 - m_{ai}^2 - m_{bi}^2)}{\Delta(m_{i,ai}^2, m_i^2, m_{ai}^2)^{1/2} \Delta(m_{i,bi}^2, m_i^2, m_{bi}^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (77)$$

But the invariants used in this expression are, according to equation (58),

$$m_{i,ai}^2 = (p_i + p_{ai})^2 \quad (78)$$

If we want to use the standard invariants s, t, u defined in (65), we can write equation (62) in the form

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0, \quad (79)$$

by changing the sign of the final state four-momenta. Equations (55) to (60') are also valid for time-like four-momenta p_i, p_j with negative energy. But the sign of $q_i(j)$ will be changed whenever j is a final state particle. And the sign of $q_i(ai) \cdot q_i(bi)$ will be changed unless ai and bi are both initial or both final particles, i. e., (a, b) are (t, u) or (u, t) .

The right hand side of equation (77) can be written in a more symmetrical way. Calling $\Gamma_{i,ai,bi}$ its numerator and $c = ba$,[†] we have from (79) :

$$\Gamma_{i,ai,bi} + \Gamma_{i,ai,ci} + \Delta(m_{i,ai}^2, m_i^2, m_{ai}^2) = 0. \quad (80)$$

This expression and the symmetry properties of Γ and Δ give the new form of $\Gamma_{i,ai,bi}$:

$$\Gamma_{i,ai,bi} = -\frac{1}{2} \left[\Delta(m_{i,ai}^2, m_i^2, m_{ai}^2) + \Delta(m_{i,bi}^2, m_i^2, m_{bi}^2) - \Delta(m_{i,ci}^2, m_i^2, m_{ci}^2) \right]. \quad (81)$$

Thus, $\cos \Psi_{i,ba}$ is given by the expressions (a_1) and (b_1) in Table 1 .

The explicit value of $\sin \Psi_{i,ba}$ defined in (76) is given by the expressions (a_2) and (b_2) in the same Table. The signs in (b_2) are easily obtained from (62) and (62).

[†] i. e., $ci = b(ai)$

Table 1. - Rotations around the normal which relate the frames associated with s-, t-, and u-channels

Crossing angle $\psi_{i,ba}$ which transform for particle i the frames associated to channel a into the frames associated to channel b :

$$(a_1) \quad \cos \psi_{i,ba} = \epsilon_{ba} \left[(a-m_i^2 - m_{ai}^2)(b-m_i^2 - m_{bi}^2) - 2m_i^2(c-m_i^2 - m_{ci}^2) \right] / \left[\Delta_{i,a} \cdot \Delta_{i,b} \right]^{1/2} =$$

$$= -\epsilon_{ba} \left[\Delta_{i,a} + \Delta_{i,b} - \Delta_{i,c} \right] / 2 \left[\Delta_{i,a} \cdot \Delta_{i,b} \right]^{1/2}$$

$$(a_2) \quad \sin \psi_{i,ba} = \epsilon_{i,ba} (1 - \cos^2 \psi_{i,ba})^{1/2} =$$

$$= \epsilon_{i,ba} \left[-\Delta(\Delta_{i,a}, \Delta_{i,b}, \Delta_{i,c}) \right]^{1/2} / 2 \left[\Delta_{i,a} \cdot \Delta_{i,b} \right]^{1/2}$$

(b₁) Signs of the expressions in (a₁), for the same sign conventions in channels a and b ,

$$\epsilon_{ba} = +1 \quad \text{for } (b,a) = (u,t), (t,u)$$

$$\epsilon_{ba} = -1 \quad \text{in any other cases.}$$

(b₂) Signs of the expressions in (a₂), for the Basel convention (66),

$$\epsilon_{i,ba} = +1 \quad \text{for } i = \text{initial and } (b,a) = (s,t), (u,t), (u,s)$$

$$\text{for } i = \text{final and } (b,a) = (t,s), (t,u), (s,u)$$

$$\epsilon_{i,ba} = -1 \quad \text{in any other cases}$$

(c) Terminology used in (a₁) and (a₂) :

a, b, c = label for the three different channels s, t, u, and for their corresponding invariants

a_i = label for the particle associated to particle i in channel a (see 64')

m_i = mass of particle i .

$$\Delta_{i,a} = \Delta(a, m_i^2, m_{a_i}^2)$$

$$\Delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$$

PARTIE I - APPENDICE 4

SYMMETRIES DISCRETES P , T , C .

1.	Structure de la probabilité de transition	IV-1
2.	Non-conservation de la parité	IV-4
	2.1. Désintégration spontanée d'un système A non polarisé.	IV-6
	2.2. Désintégration d'une particule polarisée de spin 1/2.	IV-8
3.	Invariance par renversement du mouvement	IV-9
4.	Invariance par T P	IV-13
5.	Invariance par conjugaison de charge C et par C P	IV-14
6.	Invariance par C P T	IV-16.

1. STRUCTURE DE LA PROBABILITE DE TRANSITION.

Si ρ_1 est la matrice densité de l'état initial, la distribution de probabilités dans l'état final est caractérisée par la matrice

$$\rho_f = S \rho_1 S^* . \quad (1)$$

On mesure en général dans une expérience la probabilité de transition vers un état décrit par ρ_2 , probabilité qui vaut

$$m = \text{Tr}(\rho_f \rho_2) = \text{Tr}(S \rho_1 S^* \rho_2) \quad \dagger \quad (2)$$

† L'opération de trace n'étant ici à effectuer que sur l'espace de polarisation de la particule sortante.

Lorsqu'on observe l'énergie-impulsion mais non la polarisation (c'est-à-dire que l'on intègre sur la polarisation dans l'état final) \mathbb{M} est la quantité utilisée dans le second chapitre où l'on avait fait ρ' indépendant des variables de polarisation. De façon générale ρ' est un opérateur hermitique décrivant l'appareil de mesure.

Lorsqu'il y a deux particules dans l'état initial (phénomène de collision), ρ_i est le produit tensoriel $\rho_i^1 \otimes \rho_i^2$. Au contraire $S\rho_i S^*$ n'est jamais un tenseur décomposable, cela caractérise le fait qu'il y a eu interaction ; ρ_f est une combinaison linéaire à coefficients positifs de produits tensoriels de matrices densité correspondant aux particules sortantes. Mais, de toute manière, puisque toute matrice densité dépend linéairement des tenseurs de polarisation $s^{\lambda_1 \dots \lambda_k}$ de la particule qu'elle décrit, et que \mathbb{M} dépend linéairement des matrices densité attachées à chacune des particules intervenant dans l'interaction, \mathbb{M} dépend linéairement du tenseur de polarisation de chacune de ces particules.

Nous ne considérerons désormais que des particules de spin $\frac{1}{2}$ ou des particules n'ayant qu'une polarisation dipolaire, alors, pour chacune d'entre elles, les grandeurs que l'on observera sont au plus : \underline{p} et \underline{s} avec

$$\underline{p}^2 = m^2, \quad \underline{p} \cdot \underline{s} = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq -\underline{s}^2 \leq 1 \quad (3)$$

Par exemple, dans la désintégration du μ polarisé, on observe tout au plus $\underline{p}_\mu, \underline{S}_\mu, \underline{p}_e, \underline{S}_e$, mais ni l'énergie-impulsion, ni la polarisation des deux neutrinos (ce qui correspond à une intégration sur ces observables).

Nous supposons évidemment l'invariance pour les transformations du groupe de Poincaré connexe \mathcal{P}_0 ; nous pouvons alors (voir par exemple H. Weyl "Classical groups") que les seuls invariants que l'on puisse construire avec les quantités observées, à partir desquels l'invariant \mathbb{M} doit lui-même être

construit, sont les produits scalaires du type $\underline{p}_1 \cdot \underline{s}_2$, $\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2$ et $\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2$, ainsi que les déterminants des $(a,b,c,d) = \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} a^\lambda b^\mu c^\nu d^\rho$ faits de \underline{p} et de \underline{s} . Il faut aussi tenir compte de la polarisation circulaire λ des éventuelles particules de masse nulle. La table I indique comment ces invariants (pour ρ_0) sont transformés par symétrie d'espace, renversement du sens du temps et conjugaison de charge :

TABLE I.

	P ou PC	T ou TC	PT ou PTC
$\underline{p} \cdot \underline{p}_2$ ou $\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2$	+	+	+
$\underline{p}_1 \cdot \underline{s}_2$	-	+	-
$\det(a,b,c,d) \begin{cases} 4 \underline{p} \\ 2 \underline{p}, 2 \underline{s} \\ 4 \underline{s} \end{cases}$	-	-	+
$3 \underline{p}, 1 \underline{s}$	+	-	-
$1 \underline{p}, 3 \underline{s}$	+	-	-
λ	-	+	-

Pour établir cette table, il faut se souvenir que \underline{s} est un pseudo-vecteur tandis que \underline{p} est un vecteur. Quant à la conjugaison de charge C , elle commute avec toute transformation du groupe de Poincaré puisqu'elle n'agit pas sur les observables cinématiques ; elle laisse donc invariants \underline{p} et \underline{s} . Pour ce qui est de T , il faut tenir compte de ce que n'est pas seulement le renversement du sens du temps ($x^0 \longrightarrow -x^0$, $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}$), mais aussi, afin que l'énergie reste positive, le renversement du mouvement

$(E \rightarrow E, \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \Rightarrow s^0 \rightarrow s^0, \vec{s} \rightarrow -\vec{s})$; la dernière ligne de la table découle immédiatement de l'équation $\underline{W} = \lambda \underline{P}$.

2. NON CONSERVATION DE LA PARITE.

Comment observer une absence de symétrie pour la réflexion d'espace ? Etant donné un système physique dans un état Σ_1 , il se peut qu'existe un système identique dans un état Σ_1' (état "miroir") obtenu à partir de Σ_1 par une opération de symétrie d'espace P. Si Σ_1' est le même état que Σ_1 , on dit qu'il possède une symétrie spatiale interne.

Si Σ_1' n'existe pas, les lois de la nature décrivant des phénomènes où intervient le système en question ne sauraient être invariantes par P. Si Σ_1' existe, nous dirons que les lois de la nature concernées sont invariantes par P si et seulement si la probabilité λ_{12} pour le système d'évoluer de Σ_1 vers un autre état Σ_2 est égale à la probabilité λ'_{12} d'évolution de Σ_1' vers Σ_2' , où $\Sigma_1' = P \Sigma_1$ et $\Sigma_2' = P \Sigma_2$. Définissant

$$\lambda = \frac{\lambda_{12} + \lambda'_{12}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{\lambda_{12} - \lambda'_{12}}{2} \tag{4}$$

la non invariance par P sera généralement démontrée à partir de $\lambda_{12} \neq \lambda'_{12}$ ou $\lambda' \neq 0$.

Comme P échange Σ_1, Σ_2 et λ_{12} avec Σ_1', Σ_2' et λ'_{12} , elle laisse invariant λ alors qu'elle transforme λ' en $-\lambda'$: λ est un scalaire et λ' un pseudoscalaire. De ce que les probabilités de transition λ_{12} et λ'_{12} ne sont jamais négatives, on tire $|\lambda'| \leq \lambda$ et l'on pourra parler d'une "violation maxima de la parité" lorsque $|\lambda'| = \lambda$. Par contre, il ne suffit pas que $\lambda' = 0$ pour que la parité soit conservée, en vertu de cette règle de logique très simple mais trop souvent oubliée :

$$(A \Rightarrow B) \quad \xleftrightarrow{\text{est équivalent à}} \quad (\text{non } B \Rightarrow \text{non } A)$$

mais n'a aucune influence sur la proposition inverse

$$(B \implies A) \iff (\text{non } A \implies \text{non } B)$$

où A est ici la symétrie par P et B le fait que $\lambda = 0$. Pour citer un autre exemple historique :

$$P \implies \text{pas de dipôle électrique du nucléon}$$

et dipôle électrique du nucléon $\neq 0 \implies$ non P sont des propositions équivalentes et vraies.

$$\text{non } P \implies \text{dipôle électrique du nucléon } \neq 0$$

et pas de dipôle électrique du nucléon \implies P sont des propositions équivalentes mais fausses.

2.1. Désintégration spontanée d'un système A non polarisé.

$$\text{Soit la réaction } A \longrightarrow a + b + \dots \quad (5)$$

où a a une masse $m \neq 0$ et un spin $j_a = \frac{1}{2}$. Nous supposons que les énergies-impulsions \underline{P} et \underline{p} de A et a, et la polarisation \underline{s} de a sont les seules quantités dynamiques observées. En vertu de ce qui a été établi au premier paragraphe, la probabilité de transition λ_{12} peut s'écrire

$$\lambda_{12}(\underline{s}) = f + g \underline{P} \cdot \underline{s} \quad (6)$$

où f et g sont des fonctions (scalaires) de $\underline{P}^2 = M^2$, $\underline{p}^2 = m^2$ et $\underline{P} \cdot \underline{p}$. Pour mettre en évidence une violation de la parité par la réaction (5), il suffit de montrer que $g \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda' \neq 0$ (λ' défini par (4)). $\lambda_{12}(\underline{s})$ peut aussi s'écrire.†

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(\underline{s}) &= \text{Tr} (SS^* \rho_2) = \text{Tr} \left(f \left(I - 2 \frac{W}{m} \cdot \underline{a} \right) \frac{1}{2} \left(I - 2 \frac{W}{m} \cdot \underline{s} \right) \right) = \\ &= f \left(1 - \underline{a} \cdot \underline{s} \right) = f \left(1 + \vec{\alpha} \cdot \vec{\zeta} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

† SS^* étant une matrice 2×2 positive, sa forme la plus générale est celle d'une matrice densité 2×2 , au facteur $f > 0$ près.

où $\underline{a} = \underline{n} \rightarrow \alpha$ et $\underline{s} = \underline{n} \rightarrow \zeta$ ($\underline{n} = \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{n}^{(3)}$)
 $\underline{p} \cdot \underline{a} = 0$ et $0 \leq -\underline{a}^2 \leq 1$

\underline{a} caractérise le pouvoir polarisant de la réaction (5) et peut aisément être calculé à partir de $\lambda_{12}(\underline{s})$:

$$\alpha^i = \frac{\lambda_{12}(\underline{s} = \underline{n}^{(i)}) - \lambda_{12}(\underline{s} = -\underline{n}^{(i)})}{2\lambda_{12}(\underline{s} = 0)} \quad (8)$$

où $2\lambda_{12}(\underline{s} = 0) = \lambda_{12}(\underline{s} = \underline{n}^{(i)}) + \lambda_{12}(\underline{s} = -\underline{n}^{(i)}) = 2f$, qui est indépendant de i ; c'est la probabilité de transition vers l'état non polarisé de la particule a avec l'énergie-impulsion \underline{p} .

Les équations (6) et (7) entraînent

$$-f \underline{a} \cdot \underline{s} = g \underline{p} \cdot \underline{s} \quad (9)$$

variables \underline{v}_s ; les composantes de \underline{a} et \underline{p} dans la triade $\underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{n}^{(3)}$ sont donc proportionnelles, c'est-à-dire que \underline{a} est un vecteur (orthogonal à \underline{p}) dans le 2-plan $(\underline{p}, \underline{p})$. Par conséquent

$$\underline{a} = \alpha \underline{\ell} \quad (10)$$

où $\underline{\ell}$ est le vecteur longitudinal de la tétrade $\frac{\underline{p}}{m}, \underline{n}^{(1)}, \underline{n}^{(2)}, \underline{\ell}$, en ayant choisi $\underline{t} = \frac{\underline{p}}{M}$,

$$0 \leq -\underline{a}^2 \leq 1 \quad \text{entraîne} \quad -1 \leq \alpha \leq 1 \quad (11)$$

$$\underline{\ell} \cdot \underline{p} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\ell}^2 = -1 \quad \text{entraînent} \quad \underline{\ell} = K_1 \underline{p} - K_2 \underline{p} \quad (12)$$

$$\text{avec} \quad K_1 = \frac{M^2 + m^2 - x^2}{m\sqrt{-\Delta}} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{2m}{\sqrt{-\Delta}} \quad (12')$$

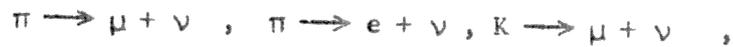
sachant que $x^2 = (\underline{p}-\underline{p})^2$ et $\Delta = (M+m+x)(-M+m+x)(M-m+x)(M+m-x)$ (12'')

$$\text{En vertu de (8),} \quad \alpha = \frac{\lambda_{12}(\underline{s} = \underline{\ell}) - \lambda_{12}(\underline{s} = -\underline{\ell})}{2f}; \quad \text{donc observer}$$

$\lambda_{12}(\underline{s} = \underline{\ell}) \neq \lambda_{12}(\underline{s} = -\underline{\ell})$, c'est mettre en évidence une violation de la parité.

Dans le système au repos de la particule initiale $\underline{p} = (M, \vec{0})$, $\alpha \underline{\ell}$ est la polarisation longitudinale; l'équation (12) la donne dans tout système de référence; elle est entièrement caractérisée par le pseudo-invariant α .

Nous pouvons appliquer tout ceci aux réactions



à la désintégration β de noyaux non polarisés et aux désintégrations de μ et d'hypérons non polarisés.

2.2. Désintégration d'une particule polarisée de spin 1/2.

Nous supposons maintenant (*) que $j_A = 1/2$ et que l'on observe uniquement les énergies-impulsions \underline{P} et \underline{p} de A et a (a étant un des produits de désintégration) et la polarisation \underline{s} de A . A partir de ces quantités, on ne peut former qu'un seul pseudoinvariant $\underline{p} \cdot \underline{s}$. La probabilité de transition s'écrit donc :

$$\lambda_{12}(\underline{s}) = f - g \underline{p} \cdot \underline{s}$$

c'est-à-dire, dans le système au repos de A où $\underline{P} = (M, \vec{0})$ et $\underline{s} = (0, \vec{s})$

$$\begin{aligned} \lambda_{12}(\vec{s}) &= f + g \vec{p} \cdot \vec{s} = f + g |\vec{p}| |\vec{s}| \cos \theta = \\ &= f(1 + \alpha |\vec{s}| \cos \theta) \end{aligned} \quad (13)$$

où

$$\cos \theta = \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{p}| |\vec{s}|}$$

$|\vec{s}|$ est le degré de polarisation de A

$$\alpha = \frac{g |\vec{p}|}{f} \quad \text{est le paramètre d'asymétrie}$$

$$\lambda_{12}(\underline{s}) \geq 0 \quad \text{entraîne} \quad -1 \leq \alpha \leq 1 \quad (14)$$

Observer $\alpha \neq 0$, c'est mettre en évidence une violation de la parité. Nous étudierons cette asymétrie dans la désintégration de μ et d'hypérons polarisés.

(*) (Si $j_a > \frac{1}{2}$ comme Co^{60} ($j = 5$) on admet que la polarisation est purement dipolaire, ce qui est le cas pour la polarisation produite par un champ magnétique).

3. INVARIANCE PAR RENVERSEMENT DU MOUVEMENT.

Etant donné un système dans l'état Σ caractérisé par des énergies-impulsions $\underline{p} = (p^0, \vec{p})$ et des polarisations $\underline{s} = (s^0, \vec{s})$ nous pouvons aussi le considérer dans l'état $\Sigma^{(\tau)}$ obtenu en remplaçant \underline{p} et \underline{s} respectivement par $\underline{p}^{(\tau)} = (p^0, -\vec{p})$ et $\underline{s}^{(\tau)} = (s^0, -\vec{s})$: c'est cet état que nous appelons état de mouvement renversé construit à partir de Σ .

Considérons un cas simple : Σ_1 et Σ_2 sont deux états d'un même système -c'est-à-dire sont constitués des mêmes particules- et la transition $\Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ est une diffusion élastique. Si l'on n'observe qu'une polarisation, elle est alors orthogonale au 3-plan de collision en raison de la conservation de la parité ; par exemple $\underline{s}_1(p_1 \wedge p_2 \wedge p_1')$ de composantes $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} p_1^\mu p_2^\nu p_1'^\rho$. Appliquons T :

$$\underline{p}_i \longrightarrow \underline{p}_i^{(\tau)} \quad \underline{p}_i' \longrightarrow \underline{p}_i'^{(\tau)}, \quad \underline{s}_1 \longrightarrow \underline{s}_1^{(\tau)} \quad (15)$$

en notant ' les observables attachées à une particule sortante. Parmi les invariants pour P_0 que l'on peut construire et qui sont les seules quantités physiques dont dépende la section efficace, un seul est changé par T ; il s'agit du déterminant $(\underline{s}_1, p_1, p_2, p_1')$ qui se transforme en la quantité opposée $(\underline{s}_1^{(\tau)}, p_1^{(\tau)}, p_2^{(\tau)}, p_1'^{(\tau)})$ comme $p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \Rightarrow p_1^{(\tau)} + p_2^{(\tau)}$ on a :

$$\begin{aligned} (\underline{s}_1, p_1, p_2, p_1') &= -(\underline{s}_1^{(\tau)}, p_1^{(\tau)}, p_2^{(\tau)}, p_1'^{(\tau)}) = \\ &= (\underline{s}_1^{(\tau)}, p_1^{(\tau)}, p_2^{(\tau)}, p_1'^{(\tau)}) \end{aligned} \quad (16)$$

Puisque la polarisation est orthogonale à chacune des énergies-impulsions, le seul invariant où elle apparaisse est le déterminant que nous avons considéré ; $(\underline{s}_1, p_1, p_2, p_1')$ exprime donc le pouvoir d'analyse de polarisation de la diffusion $p_1 + p_2 \longrightarrow p_1' + p_2'$ tandis que $(\underline{s}_1^{(\tau)}, p_1^{(\tau)}, p_2^{(\tau)}, p_1'^{(\tau)})$ exprime le pouvoir polarisant de la diffusion $p_1^{(\tau)} + p_2^{(\tau)} \longrightarrow p_1'^{(\tau)} + p_2'^{(\tau)}$: pour qu'il y ait invariance par renversement du sens du temps, il faut qu'en mesurant ces deux pouvoirs on trouve des valeurs moyennes égales, puisqu'il faut que

$$\lambda_{12}(p_1 + p_2 \longrightarrow p_1' + p_2') = \lambda^{(\tau)}(p_1^{(\tau)} + p_2^{(\tau)} \longrightarrow p_1^{(\tau)} + p_2^{(\tau)}) .$$

Dans le cas d'une désintégration, $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, Σ_1 et Σ_2 décrivant deux systèmes physiques différents. On aura donc, pour les matrices densités ρ_1 et ρ_2 correspondantes, la relation

$$\rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_1 = 0 \quad (17)$$

Cela résulte de ce que chacun des états possibles du système initial est orthogonal à chacun de ceux du système final (on travaille maintenant dans l'espace de tous les états possibles de tout système physique).

Il est très difficile, dans une désintégration par couplage faible, de tester l'invariance par T en comparant λ_{12} et $\lambda_{21}^{(\tau)}$: il faudrait reconstituer la particule initiale à partir de ses produits de désintégration ! C'est pourquoi l'on doit se contenter d'un test approximatif : on compare λ_{12} et $\lambda_{12}^{(\tau)}$. Les deux relations $\lambda_{12} = \lambda_{12}^{(\tau)}$ et $\lambda_{12} = \lambda_{21}^{(\tau)}$ ne sont équivalentes que pour autant que $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ pour toute transition, ce qui est vrai à l'ordre le plus bas des perturbations, comme nous allons le montrer.

On sait que

$$\lambda_{12} = \text{Tr } S \rho_1 S^* \rho_2 \quad \text{tandis que} \quad \lambda_{21} = \text{Tr } S \rho_2 S^* \rho_1 .$$

En développant S en

$$S = I + iH + O(H^2) \quad (18)$$

avec $H = H^*$ puisque $SS^* = I$

on a, à l'ordre le plus bas des perturbations :

$$\lambda_{12} = \text{Tr } H \rho_1 H \rho_2 = \text{Tr } H \rho_2 H \rho_1 = \lambda_{21} \quad (19)$$

en vertu de (17). Il est tout à fait justifié de faire l'approximation (18) dans le cas d'une interaction faible. Cela étant, pour observer une violation de la symétrie par T, il faut, comme le montre la Table 1, observer un déterminant. Ce n'est pas possible dans la désintégration du π s'il est admis que les neutrinos n'ont pas de polarisation transverse S_T . Comment faire dans la

désintégration du μ ? Comme il est actuellement extrêmement difficile d'observer les deux neutrinos, les seules observables dont nous disposons sont

$$\underline{p}_\mu, \underline{s}_\mu, \underline{p}_e, \underline{s}_e.$$

Mesurer $\det(\underline{p}_\mu, \underline{s}_\mu, \underline{p}_e, \underline{s}_e) \neq 0$, c'est mettre en évidence une violation de l'invariance par T (et d'ailleurs aussi de l'invariance par P). Etant une combinaison linéaire de \underline{p}_μ et \underline{p}_e , la composante longitudinale de \underline{s}_e ne contribue pas à ce déterminant. Il faut donc mesurer une composante transverse de la polarisation de l'électron : la composante transverse orthogonale, dans le système du μ au repos, au plan (\vec{p}_e, \vec{s}_μ) puisque, dans ce système :

$$\det(\underline{p}_\mu, \underline{s}_\mu, \underline{p}_e, \underline{s}_e) = m_\mu \vec{s}_\mu \cdot (\vec{p}_e \times \vec{s}_e) \quad (20)$$

Mais c'est une expérience très difficile qui n'a pu encore être réalisée !

Dans la désintégration du neutron polarisé, le groupe d'Argonne (Chicago) a étudié le déterminant

$$\det(\underline{p}_n, \underline{s}_n, \underline{p}_p, \underline{s}_e) = m_n (\vec{s}_n \times \vec{p}_p) \cdot \vec{s}_e \quad (21)$$

dans le système au repos du neutron. Ils ont trouvé une valeur moyenne nulle, c'est-à-dire n'ont mis en évidence aucune violation de l'invariance par T dans la désintégration du neutron.

Il convient d'insister sur le fait que cette absence de violation de l'invariance par T n'a été établie qu'au premier ordre des perturbations pour les couplages faibles. Mais dans les désintégrations faibles fournissant plusieurs particules inter-agissant fortement dans l'état final, l'approximation au premier ordre des perturbations des couplages forts n'a pas de sens; il en est de même de sa conséquence $\lambda_{12} = \lambda_{21}$ et l'invariance par T n'exige pas : $\lambda_{12}^T = \lambda_{12}$. Ainsi, dans la désintégration d'un hyperon polarisé en un nucléon et un nucléon et un π , la valeur moyenne de $\det(\underline{p}_y, \underline{s}_y, \underline{p}_N, \underline{s}_N)$ peut être différente de zéro (sa valeur mesurée est petite dans la désintégration du Λ^0 et non encore connue dans celle du Σ^{\pm}) sans que cela implique une

violation de l'invariance par T .

4. INVARIANCE PAR T P .

Soient $\Sigma(\underline{p}_i, \underline{s}_i)$ et $\Sigma'(\underline{p}'_i, \underline{s}'_i)$ deux états, λ et λ_{TP} les probabilités de transition respectivement de $\Sigma(\underline{p}_i, \underline{s}_i) \rightarrow \Sigma'(\underline{p}'_i, \underline{s}'_i)$ et de $\Sigma'_{TP}(\underline{p}'_i - \underline{s}'_i) \rightarrow \Sigma_{TP}(\underline{p}_i, -\underline{s}_i)$. L'invariance par TP exige $\lambda = \lambda_{TP}$, c'est-à-dire, dans le cas particulier où l'on n'observe pas de polarisation, $\lambda(\underline{p}_i \rightarrow \underline{p}'_j) = \lambda(\underline{p}'_j \rightarrow \underline{p}_i)$, ce qui est l'expression du principe du bilan détaillé. La propriété bien établie des désintégrations faibles de ne pas conserver la parité entraîne une violation de l'invariance par TP puisque, au premier ordre des couplages faibles, elles sont compatibles avec l'invariance par T .

5. INVARIANCE PAR CONJUGAISON DE CHARGE C ET PAR C P .

Soient Σ_C et Σ'_C les états obtenus à partir de deux états Σ et Σ' en remplaçant dans chacun d'eux toutes les particules par leurs antiparticules (sans changer ni les énergies-impulsions ni les polarisations). L'invariance par conjugaison de charge exige que la probabilité de transition λ_C de $\Sigma_C \rightarrow \Sigma'_C$ soit égale à λ de $\Sigma \rightarrow \Sigma'$. En particulier, l'invariance par C impose $\tau_+ = \tau_-$, c'est-à-dire que les vies moyennes d'une particule et de son antiparticule soient égales. Rappelons que : C ou CP ou CPT $\Rightarrow \tau_+ = \tau_-$ et que cela est équivalent à $\tau_+ \neq \tau_- \Rightarrow \bar{C}$ et CP et CPT .

Les désintégrations $\beta^-(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu})$ et $\beta^+(p \rightarrow n + e^+ + \nu)$ ne sont pas conjuguées de charge. On peut par contre tester l'invariance par C sur les désintégrations $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu^+_\mu$. Du fait que $\underline{p}_\pi \cdot \underline{s}_\mu$ ne change pas par C , l'invariance par conjugaison de charge entraînerait que l'on obtienne la même valeur moyenne en mesurant la polarisation longitudinale du μ^+ et du μ^- provenant respectivement de la désintégration du π^+ et du π^- . Le signe de cette polarisation ne fut mesuré pour la première fois qu'en 1960 par des physiciens russes en utilisant des μ des rayons cosmiques. Ils trouvèrent des

signes opposés pour μ^+ dans le système au repos du π^+ , μ^- ayant la polarisation longitudinale +1 tandis que μ^+ a la polarisation longitudinale -1, c'est-à-dire

$$\frac{s_{\mu^{\pm}}}{\mu^{\pm}} = \mp (K_1 p_{\mu} - K_2 p_{\pi}) \quad (22)$$

avec

$$K_1 = \frac{1}{m_{\mu}} \frac{\frac{m_{\mu}^2}{2} + \frac{m_{\mu}^2}{2}}{\frac{m_{\pi}^2}{2} - \frac{m_{\mu}^2}{2}} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{2m_{\mu}}{\frac{m_{\pi}^2}{2} - \frac{m_{\mu}^2}{2}} \quad (22')$$

en vertu de (12) et (12'), en tenant compte de ce que $(p_{\pi} - p_{\mu})^2 = 0$ puisque $p_{\pi} - p_{\mu}$ est l'énergie-impulsion d'un neutrino. On peut donc dire que la désintégration du π présente une violation maxima de l'invariance par conjugaison de charge. Par contre, elle est compatible avec l'invariance par CP (mais cela n'établit pas CP!) puisque $p_{\pi} \cdot s_{\mu}$ est un pseudoscalaire.

Le signe de la polarisation longitudinale de l'électron de désintégration du μ^+ a été mesurée mais peut-être pas avec certitude absolue. Tenant compte de ce que l'invariance par C est violée dans la désintégration du π , la mesure de l'asymétrie dans la désintégration du μ polarisé a établi que celle-ci viole aussi l'invariance par C. En effet, dans les deux cascades $\pi \rightarrow \mu + \nu' \rightarrow e + \nu + \nu'$, on observe la même asymétrie $\sim \frac{s_{\mu} \cdot p_e}{\mu \cdot p_e}$, que l'électron provienne de la désintégration du π^+ ou du π^- (négative, sauf pour les quelques électrons de basse énergie). Puisque, dans la désintégration du π , la valeur moyenne de $p_{\pi} \cdot s_{\mu}$ change de signe avec la charge, on peut en conclure qu'il en est de même de celle de $s_{\mu} \cdot p_e$ dans la désintégration du μ . La désintégration du μ présente donc elle aussi une violation maxima de l'invariance par conjugaison de charge, et elle est compatible avec l'invariance par CP.

5. INVARIANCE PAR C P T.

Il semble bien que l'invariance par CPT soit d'une nature plus fondamentale que celles précédemment étudiées dans ce chapitre. La théorie quantique des champs locaux établit l'invariance CPT, c'est-à-dire :

$$\lambda(\Sigma \longrightarrow \Sigma') = \lambda(\Sigma'_{\text{CPT}} \longrightarrow \Sigma_{\text{CPT}}) \quad (23)$$

à partir de l'invariance par P_0 , le groupe connexe de Poincaré.

Dans les processus de désintégration, on ne peut la tester qu'au premier ordre des couplages faibles. Elle prédit un changement de signe de $\underline{p}_\mu \cdot \underline{s}_e$ (c'est-à-dire de la polarisation longitudinale de l'électron) dans la désintégration du μ^+ non polarisé, et de $\underline{s}_\mu \cdot \underline{p}_e$ (c'est-à-dire de l'asymétrie de l'impulsion de l'électron) dans la désintégration du μ^+ polarisé, μ^+ et μ^- ayant la même polarisation. Dans ce dernier cas, elle prédit encore un changement de signe de la polarisation transverse de l'électron orthogonal au plan (\vec{s}_μ, \vec{p}_e) (dans le problème au repos du μ) ; mais nous avons vu que l'invariance par T exige que cette polarisation soit nulle. R.G. Sachs a proposé un test direct et absolu (= non limité au premier ordre des perturbations) de la violation de l'invariance par CPT dans la désintégration du K^0 . Rappelons, comme nous l'avons vu en (5), que $\text{CPT} \bullet \tau_+ = \tau_-$ (égalité des vies moyennes des particules et antiparticules). Depuis cette rédaction, la violation de CP et probablement de T a été observée dans la désintégration du K^0 , \bar{K}^0 l'égalité $m_{K^0} = m_{\bar{K}^0}$ est observée avec grande précision.