Chapitre 4 :

MESURE DE LA POLARISATION

DISTRIBUTION ANGULAIRE DE DESINTEGRATION

Pour déterminer complètement l'état d'un ensemble de particules de masse m $(m > 0)$, de spin j $(j > 0)$ et d'énergie-impulsion $\underline{p}$ on doit mesurer la polarisation de cet ensemble de particules. La mesure de l'énergie-impulsion est en général facile, en particulier pour les particules chargées. Au contraire, la mesure de la polarisation est souvent difficile, et la méthode utilisée pour faire cette mesure dépend du temps de vie moyen des particules considérées.

Si les particules sont "absolument" stables (électrons, protons, deutons), pour mesurer leur polarisation il suffit d'observer la diffusion de ces particules dans la matière. En effet, la distribution angulaire des particules après la diffusion dépend de leur polarisation initiale. Donc la diffusion est un "analyseur de la polarisation". De ce point de vue le neutron est stable.

Si les particules sont instables (par désintégration faible, électromagnétique ou forte), le problème de la mesure de leur polarisation est tout à fait différent, car le temps de vie est trop court pour qu'une interaction avec la matière soit possible. Cependant, il est encore possible d'obtenir des informations sur la polarisation de ces particules en observant leur désintégration. En effet, la distribution angulaire des produits de désintégration dépend de la polarisation des particules initiales. La désintégration des particules fournit donc un "analyseur naturel" de leur polarisation.

Dans ce chapitre nous montrons comment la distribution angulaire de désintégration dépend des paramètres multipolaires $t^{(L)}_{M}$ de la matrice densité de polarisation des particules qui se désintègrent, et nous montrons quels sont les paramètres mesurables par l'étude de la distribution angulaire.

1 - La distribution angulaire.

1.1 - Espace des invariants et espace des phases pour une désintégration.

Nous considérons la désintégration d'une particule A de masse m ($m > 0$) et d'énergie-impulsion $\underline{p}$, en ν particules a_i ($i = 1, \ldots, \nu$), de masses m_i ($m_i > 0$) et d'énergie-impulsion $\underline{p}_i$.

$$A \longrightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu \tag{1}$$

La conservation de l'énergie-impulsion s'écrit :

$$\underline{p} = \sum_{i=1}^{\nu} \underline{p}_i \tag{2}$$

La distribution angulaire des ν particules finales est complètement caractérisée par la mesure des impulsions $\vec{p}_i$. Ces 3ν composantes des impulsions ne sont pas toutes indépendantes, la conservation de l'énergie-impulsion (2) impose quatre contraintes. Donc la configuration des particules finales peut être représentée par un point dans un espace à $\delta = 3\nu - 4$ dimensions. Cet espace est appelé l'espace des phases de l'état final. On le note Ω. L'ensemble des coordonnées d'un point de cet espace est noté ω. La mesure invariante relativiste $d\omega$ de l'espace Ω est le produit des mesures invariantes $d\Omega_{m_i}(\vec{p}_i)$ sur les hyperboloïdes de masse de chaque particule (voir Ch. I (5)) multiplié par la distribution $\delta^4(\underline{p} - \sum_i \underline{p}_i)$ de conservation de l'énergie-impulsion. On a,

$$d\omega = (2\pi)^{4-3\nu} \int \delta^4 (\underline{p} - \sum_{i=1}^{\nu} \underline{p}_i) \prod_{i=1}^{\nu} \frac{d\vec{p_i}}{E_i} \tag{3}$$

l'intégration se faisant sur quatre variables en utilisant la distribution δ^4.

Si on se donne les $n = \nu + 1$ quadrivecteurs p, p_i ($i=1, \ldots, \nu$) ($\nu > 2$), reliés par la conservation de l'énergie-impulsion (2), le nombre d'invariants (autres que les masses) que l'on peut former avec ces quadrivecteurs est

$$d = 3n - 10 = 3\nu - 7 . \tag{4a}$$

La relation entre la dimension d de l'espace des invariants et la dimension δ de l'espace des phases s'écrit :

$$\delta = d + 3 \tag{4b}$$

La signification physique de cette relation est très simple. Plaçons-nous dans le système au repos de la particule initiale. Dans ce système, les ν impulsions finales reliées par les quatre conditions de conservation de l'énergie et de l'impulsion

$$\sum_{i=1} \vec{p}_i = 0 \ , \qquad \sum_{i=1} \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2} = m \tag{5}$$

forment un polygone fermé à ν côtés. Cinématiquement toutes les configurations de ce polygone sont possibles, à chaque position correspond un point de l'espace des phases. Si on se donne un point de l'espace des invariants on "rigidifie" le polygone, c'est-à-dire que l'on fixe la longueur des côtés et les angles formés entre les côtés successifs. Mais la donnée des d invariants ne fixe pas l'orientation du solide dans l'espace à trois dimensions. Il faut se donner trois paramètres supplémentaires fixant cette orientation pour caractériser complètement le polygone, c'est-à-dire pour fixer un point dans l'espace des phases.

I.2- Distribution angulaire de désintégration.

La distribution angulaire de désintégration est une fonction de la variable ω qui caractérise les points de l'espace de phases Ω. Elle est définie de la manière suivante. On considère N désintégrations. On note $dN(\omega)$ le nombre d'évènements caractérisés par des points qui se trouvent dans un volume infinitésimal $d\omega$ autour du point ω. La distribution angulaire $I(\omega)$ est la densité d'évènements dans l'espace des phases,

$$I(\omega) = \frac{1}{N} \frac{dN(\omega)}{d\omega} \tag{6}$$

Par définition la densité $I(\omega)$ est positive ou nulle pour tout point ω, et elle est normalisée à l'unité :

$$\int_\Omega I(\omega)\, d\omega = 1 \tag{7}$$

On peut choisir de paramétrer l'espace de phases par б angles, et ceci explique l'appellation distribution angulaire donnée à $I(\omega)$. Mais le plus souvent on paramètre Ω par les d invariants et trois angles ; dans ce cas l'appellation distribution angulaire est un peu abusive.

I.3 - Désintégration à deux corps.

Considérons la désintégration à deux corps

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow a_1 + a_2 \ , \\ \underline{p} &= \underline{p}_1 + \underline{p}_2 \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Pour une telle désintégration la dimension de l'espace des invariants est nulle car tous les invariants sont fixés par la conservation de l'énergie-impulsion, et la dimension de l'espace des phases est $\delta = 3\nu - 4 = 2$. Par conséquent la configuration des particules finales est fixée par deux variables. Dans le système au repos de la particule qui se désintègre on choisit en général pour variables les angles polaire θ et azimuthal φ de l'impulsion d'une des particules finales, $\vec{p}_1$ par exemple, relativement à un système de référence donné.

La variable ω de l'espace de phases représente ces deux angles $\omega = (\theta, \varphi)$ et la densité des évènements dans l'espace des phases est une "vraie" distribution angulaire que l'on note $I(\theta, \varphi)$. La mesure invariante $d\omega$ est :

$$d\omega = (2\pi)^{-2} \frac{|\vec{p}_1|}{m} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{9}$$

I.4 - Désintégration à trois corps.

Considérons la désintégration à trois corps

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow a_1 + a_2 + a_3 \\ \underline{p} &= \underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \underline{p}_3 \end{aligned} \tag{10}$$

Pour cette désintégration la dimension de l'espace des invariants est $d = 3\nu - 7 = 2$. On choisit pour invariants indépendants deux des trois quantités définies par

$$s_i = (\underline{p} - \underline{p}_i)^2 \tag{11}$$

où $\underline{p}_i$ est l'impulsion de la particule finale a_i. Ces trois quantités ne sont pas indépendantes, on a la relation linéaire :

$$s_1 + s_2 + s_3 = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \tag{11'}$$

La dimension de l'espace des phases est $\delta = 3\nu - 4 = 5$. Les cinq variables d'espace de phases peuvent être choisies de la façon suivante : les deux invariants s_1 et s_2, et dans le système au repos de la particule qui se désintègre, les deux angles θ, φ qui caractérisent la direction de la normale au plan de désintégration et l'angle Ψ qui caractérise la position dans ce plan d'un vecteur impulsion par rapport à un système de référence donné . Avec ce choix de variables la distribution angulaire n'est pas une "vraie" distribution angulaire car toutes les variables d'espace de phases ne sont pas des angles. On la note $I(s_1, s_2; \theta, \varphi, \Psi)$.

La mesure invariante de l'espace des phases est :

$$d\omega = (2\pi)^{-5} \frac{1}{4m^2} ds_1 \, ds_2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, d\Psi \tag{12}$$

On peut ne s'intéresser qu'à la distribution en θ, φ. On définit alors la distribution angulaire de la normale

$$I(\theta, \varphi) = \int I(s_1, s_2, \theta, \varphi, \Psi)(2\pi)^{-5} \frac{1}{4m^2} ds_1 \, ds_2 \, d\Psi \tag{12'}$$

On peut aussi ne s'intéresser qu'à la distribution en s_1 et s_2. On définit

$$I(s_1, s_2) = \int I(s_1, s_2, \theta, \varphi, \Psi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, d\Psi \tag{12''}$$

La distribution $I(s_1, s_2)$ ou la distribution $I(E_1, E_2)$ où E_1 et E_2 sont les énergies dans le système du centre de masse de la particule qui se désintègre, est appelée "diagramme de Dalitz".

2 - Distribution angulaire et polarisation.

2.1 - Amplitude de désintégration.

Nous considérons une désintégration à ν corps décrite par (1) et (2). Nous supposons que pour chaque particule initiale ou finale, d'impulsion $\underline{p}_i$ nous avons défini une tétrade que nous notons $\{\underline{p}_i\}$. Si $\{\underline{t}\}$ est une tétrade de référence nous notons $[\underline{p}_i]$ la transformation de Lorentz qui applique la tétrade $\{\underline{t}\}$ sur la tétrade $\{\underline{p}_i\}$:

$$\{\underline{p}_i\} = [\underline{p}_i] \cdot \{\underline{t}\} \qquad (13)$$

L'état cinématique des particules initiale et finales peut être développé sur les bases de vecteur s :

$$|\{\underline{p}\}\, jm> \quad \text{état initial} \qquad (14a)$$

$$\bigotimes_{i=1}^{\nu} |\{\underline{p}_i\}\, j_i m_i > \quad \text{état final} \qquad (14b)$$

Pour ce processus de désintégration les éléments de la matrice de transition T sont dans cette base

$$T(\{\omega\})^{m_1 m_2 \ldots m_\nu}{}_m = \left(\bigotimes_{i=1}^{\nu} <\{\underline{p}_i\}\, j_i m_i|\right) T|\{\underline{p}\}\, jm> \qquad (15)$$

La conservation de l'énergie-impulsion permet d'écrire que l'amplitude de transition ne dépend que de la variable ω (c'est-à-dire des $3\nu-4$ variables d'espace de phases) et du choix des tétrades pour chaque $\underline{p}$. C'est ce que nous notons symboliquement par $\{\omega\}$. Nous allégeons la notation en posant l'ensemble des nombres quantiques magnétiques de l'état final égal à μ :

$$m_1 m_2 \ldots m_\nu = \mu, \qquad (16)$$

ce qui permet d'écrire le premier membre de (15) sous la forme $T(\{\omega\})^{\mu}{}_m$

2.2 - Calcul de la distribution angulaire de désintégration.

Nous notons $(\rho_i)^m{}_n$ la matrice densité de polarisation de l'état initial dans la base (14a). Nous notons $<A>_\omega$ la valeur moyenne sur l'état final ω d'une grandeur physique représentée dans la base (14b) par une matrice hermitique A. En mécanique quantique cette valeur moyenne se calcule à partir de ρ_i et de T par la formule :

$$< A >_\omega = Tr_f \left[A\ T(\omega)\rho_i\ T(\omega)^* \right] \tag{17}$$

où Tr_f indique la trace dans l'espace de polarisation de l'état final, explicitemen

$$< A >_\omega = A^{\mu}{}_{\mu'}\ T(\omega)^{\mu'}{}_{m}(\rho_i)^{m}{}_{n}\ \overline{T(\omega)^{n}{}_{\mu}} \tag{18}$$

La distribution angulaire de désintégration est proportionnelle à la valeur moyenne de l'opérateur identité :

$$I(\omega) \simeq < 1 >_\omega \tag{19}$$

En fait la distribution angulaire normalisée à l'unité s'écrit :

$$I(\omega) = \frac{Tr_f \left[T(\omega)\ \rho_i\ T(\omega)^* \right]}{\int_\Omega Tr_f \left[T(\omega)\rho_i\ T(\omega)^* \right] d\omega} \tag{20}$$

c'est-à-dire, si nous considérons les indices :

$$I(\omega) = \frac{T(\omega)^{\mu}{}_{m}(\rho_i)^{m}{}_{n}\ \overline{T(\omega)^{n}{}_{\mu}}}{\int_\Omega T(\omega)^{\mu}{}_{m}(\rho_i)^{m}{}_{n}\ \overline{T(\omega)^{n}{}_{\mu}} d\omega} \tag{20'}$$

3) <u>La matrice de désintégration.</u>

Considérons la quantité $O(\omega)$ définie de la manière suivante :

$$O(\omega) = T(\omega)^* \otimes T(\omega) \tag{21}$$

Cette quantité est une matrice dans l'espace de polarisation des particules finales et une matrice dans l'espace de polarisation de la particule initiale. Ses éléments sont :

$$\left[O(\omega)^{\mu}{}_{\mu'} \right]^{m'}{}_{m} = \overline{T(\omega)}^{m'}{}_{\mu'}\ T(\omega)^{\mu}{}_{m} \tag{21'}$$

Cette matrice est appelée matrice de désintégration. Elle contient toute la dynamique de la désintégration. Avec cette notation la distribution angulaire (20') s'écrit :

$$I(\omega) = \frac{\left[O(\omega)^{\mu}{}_{\mu} \right]^{n}{}_{m}\ (\rho_i)^{m}{}_{n}}{\int_\Omega \left[O(\omega)^{\mu}{}_{\mu} \right]^{n}{}_{m} (\rho_i)^{m}{}_{n}\ d\omega} \tag{22}$$

La matrice ρ_i ne dépend pas de ω donc le dénominateur D de l'expression (22) peut être écrit :

$$D = (\rho_i)^m{}_n \int_\Omega \left[O(\omega)^\mu{}_\mu\right]^n{}_m \; d\omega \tag{23}$$

Le résultat de l'intégrale est une matrice de l'espace de polarisation de la particule initiale proportionnelle à la matrice diagonale.
En effet nous avons vu au § 1 que la variable ω représente d invariants s_i et trois angles θ, φ, Ψ. Considérons la matrice

$$O(s_1, \ldots, s_d)^m{}_n = \int \left[O(\omega)^\mu{}_\mu\right]^m{}_n \; d(\cos\theta)\, d\varphi\, d\Psi$$

Cette matrice ne dépendant que des invariants s_i est invariante par rotation. Elle est donc proportionnelle à la matrice identité.

On peut écrire :

$$\int_\Omega \left[O(\omega)^\mu{}_\mu\right]^n{}_m \; d\omega = \vartheta\, \delta^n{}_m \tag{24}$$

et on a :

$$D = (\rho_i)^m{}_n\, \vartheta\, \delta^n{}_m = \vartheta\, \mathrm{Tr}_{(\rho_i)} = \vartheta \tag{25}$$

On remarque que D ne dépend pas de la matrice densité initiale. En prenant la trace des deux membres de l'équation (24) et en utilisant (25) on obtient l'expression de D :

$$D = (2j+1)^{-1} \int_\Omega \left[O(\omega)^\mu{}_\mu\right]^m{}_m \; d\omega \tag{26}$$

que l'on peut écrire sans indices :

$$D = (2j+1)^{-1} \int_\Omega \mathrm{Tr}_i\, \mathrm{Tr}_f \left[O(\omega)\right] d\omega \tag{26'}$$

Finalement la distribution angulaire (22) s'écrit :

$$I(\omega) = \frac{\mathrm{Tr}_i\, \mathrm{Tr}_f \left[O(\omega)\, \rho\right]}{(2j+1)^{-1} \int_\Omega \mathrm{Tr}_i\, \mathrm{Tr}_f \left[O(\omega)\right] d\omega} \tag{27}$$

On peut définir une matrice de désintégration normalisée $\widetilde{O}(\omega)$:

$$\widetilde{O}(\omega) = \frac{O(\omega)}{D} \tag{27'}$$

La distribution angulaire s'écrit alors :

$$I(\omega) = Tr_i \, Tr_f \left[\widetilde{O}(\omega) \, \rho \right] \tag{27''}$$

Le problème du calcul des distributions angulaires se ramène donc au calcul de la matrice de désintégration $\widetilde{O}(\omega)$.

3 - Mesure de la polarisation dans une désintégration à deux corps : $j \longrightarrow j_1 + j_2$.

3.1- Distribution angulaire des désintégrations à deux corps : $j \longrightarrow j_1 + j_2$.

Considérons la désintégration en deux particules de spin j_1 et j_2 d'une particule de spin j dont la polarisation est décrite par une matrice densité ρ_i. L'espace des phases de l'état final est paramétré par deux angles (θ, φ). La distribution angulaire $I(\theta, \varphi)$ peut être développée sur la base de fonctions orthogonales constituée par les harmoniques sphériques $Y^{(L)}_M(\theta, \varphi)$:

$$I(\theta, \varphi) = \sum_{L,M} \overline{a^{(L)}_M} \, Y^{(L)}_M(\theta, \varphi) \tag{28}$$

Les coefficients $a^{(L)}_M$ dépendent de la polarisation de la particule initiale et de la dynamique de la désintégration. Nous pouvons préciser la dépendance en polarisation de ces $a^{(L)}_M$. En effet, d'après la formule générale (27) de la distribution angulaire nous savons que $I(\theta, \varphi)$ dépend linéairement des paramètres $t^{(L)}_M$ de la matrice densité initiale.

De plus nous savons que le groupe des rotations agit sur la base des $Y^{(L)}_M(\theta, \varphi)$ de la manière suivante :

$$Y^{(L)}_M(\theta, \varphi) \rightsquigarrow {}^R Y^L_M(\theta, \varphi) = Y^{(L)}_{M'}(\theta, \varphi) \, D^L(R)^{M'}{}_M . \tag{29}$$

Les coefficients $a^{(L)}_M$ se transforment selon la loi

$$\overline{a^{(L)}_M} \longrightarrow {}^R\overline{a^{(L)}_{M'}} = \sum_M \bar{a}^{(L)}_M \, D^{(L)}(R)^{M'}{}_M \tag{30}$$

ou

$$a^{(L)}_M \longrightarrow {}^R a^{(L)}_{M'} = a^{(L)}_M \, D^L(R^{-1})^M{}_{M'} \tag{31}$$

Les coefficients $a^{(L)}_M$ ont la même loi de transformation que les $t^{(L)}_M$, ils ne peuvent dépendre linéairement des $t^{(L)}_M$ qu'en leur étant proportionnels.

On a donc :

$$a_M^{(L)} = C(L)\ t_M^{(L)} \tag{32}$$

et la distribution angulaire s'écrit sous la forme :

$$I(\theta, \varphi) = \sum_{L=0}^{2j} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t_M^{(L)}}\ Y_M^{(L)}(\theta, \varphi) \tag{33}$$

les bornes des sommations étant imposées par les valeurs possibles de L et **M** dans les paramètres $t_M^{(L)}$.

La normalisation de la distribution angulaire permet de calculer la valeur du coefficient C(0). En effet en utilisant la formule

$$\int Y_M^{(L)}(\omega)\, d\omega = \sqrt{4\pi}\ \delta_{L0}\ \delta_{M0}$$

et la relation $t_0^{(0)} = 1$, on obtient :

$$\int I(\omega)\, d\omega = \sqrt{4\pi}\ C(0)$$

Si la distribution angulaire est normalisée à l'unité on a $C(0) = 1/\sqrt{4\pi}$ et on peut écrire la distribution angulaire sous la forme :

$$\boxed{I(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{L=1}^{2j} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t_M^{(L)}}\, Y_M^{(L)}(\theta, \varphi)} \tag{34}$$

Le problème du calcul des distributions angulaires se ramène au calcul des 2j coefficients C(L) en fonction de la dynamique de la désintégration et des spins j, j_1, j_2 des particules.

3.2- Conservation de la parité dans la désintégration.

Considérons les processus de désintégration $j \longrightarrow j_1 + j_2$. La matrice densité de polarisation de la particule initiale, ρ_i, est invariante par inversion par rapport à l'origine dans son système au repos, si la parité est conservée dans la désintégration, l'état final est lui aussi invariant donc la distribution angulaire est invariante par l'opération

$$\begin{aligned} \theta \longrightarrow \theta' &= \pi - \theta \\ \varphi \longrightarrow \varphi' &= \varphi + \pi \end{aligned} \qquad I(\theta, \varphi) = I(\pi - \theta, \varphi + \pi) \tag{35a}$$

Or on a la relation

$$Y^{(L)}_{M}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-)^{L}\, Y^{(L)}_{M}(\theta, \varphi) \tag{35b}$$

Donc, d'après la forme générale de la distribution angulaire (34) la conservation de la parité implique que les coefficients $C(L)$ avec L impair soient identiquement nuls.

Donc

$$\begin{matrix}\text{conservation} \\ \text{de la parité}\end{matrix} \Longrightarrow C(L) \equiv 0 \text{ pour } L \text{ impair.} \tag{36}$$

Par conséquent, lorsque la désintégration conserve la parité, seuls les paramètres multipolaires $t^{(L)}_{M}$ avec L pair apparaissent dans la distribution angulaire de désintégration à deux corps. La distribution angulaire est un analyseur partiel de la polarisation.

3.3-Les moments de la distribution angulaire.

La distribution angulaire de désintégration dépendant des paramètres multipolaires de la particule qui se désintègre, l'observation expérimentale de cette distribution angulaire permet de mesurer la polarisation. Lorsque le nombre d'évènements est peu élevé on peut évaluer les paramètres multipolaires en ajustant au mieux la distribution expérimentale avec la formule théorique (34). On obtient ainsi les paramètres $t^{(L)}_{M}$ et les paramètres dynamiques $C(L)$. Cependant lorsque la statistique est importante et que les coefficients $C(L)$ sont connus, on peut mesurer les paramètres multipolaires par la méthode dite des moments. Les moments $< Y^{(L)}_{M} >$ de la distribution angulaire à deux corps sont définis par

$$< Y^{L}_{M} > = \int I(\omega)\, Y^{L}_{M}(\omega)\, d\omega \tag{37}$$

En utilisant la relation d'orthogonalité des harmoniques sphériques

$$\int \overline{Y}^{(L)}_{M}(\omega)\, Y^{(L')}_{M'}(\omega)\, d\omega = \delta_{LL'}\, \delta_{MM'} \tag{38}$$

les moments de la distribution angulaire théorique (34) sont :

$$< Y^{(L)}_{M} > = C(L)\, t^{(L)}_{M} \tag{39}$$

Donc, les paramètres multipolaires sont reliés linéairement aux moments de la distribution angulaire. Si les coefficients C(L) sont non nuls on a

$$\boxed{t_M^{(L)} = \frac{\langle Y_M^{(L)} \rangle}{C(L)}} \tag{39'}$$

3.4 - Mesure des moments expérimentaux.

Expérimentalement les moments $\langle Y_M^{(L)} \rangle$ de la distribution angulaire sont mesurés de la façon suivante.

a) Si on étudie la désintégration $j \longrightarrow j_1 + j_2$ de particules de spin j bien déterminé. Si on observe N désintégrations, chaque évènement i (i=1,..., N) est caractérisé par deux angles (θ_i, φ_i). Les moments de la distribution angulaire expérimentale sont par définition

$$\langle Y_M^{(L)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} Y_M^{(L)} (\theta_i, \varphi_i) \tag{40}$$

b) Supposons que l'objet que l'on étudie soit une résonance produite avec un fond non polarisé important. Les N évènements observés dans la bande de résonance proviennent soit du fond, soit de la résonance. On peut estimer les nombres d'évènements N_F et N_R par continuité, mais on ne peut évidemment pas dire quels sont les évènements du fond et ceux de la résonance. Or ce que l'on veut mesurer c'est la distribution angulaire des évènements de la résonance, c'est-à-dire les moments

$$\langle Y_M^L \rangle_R = \frac{1}{N_R} \sum_{r=1}^{N_R} Y_M^L (\theta_r, \varphi_r) \tag{41}$$

Les seules quantités directement mesurables sont les moments $\langle Y_M^L \rangle$ obtenus à partir de tous les évènements. Par définition on a :

$$N \langle Y_M^L \rangle = N_R \langle Y_M^L \rangle_R + N_F \langle Y_M^L \rangle_F \tag{42}$$

Par ailleurs, le fond n'étant pas polarisé on a $\langle Y_M^L \rangle_F = 0$. On déduit

$$\boxed{\langle Y_M^L \rangle_R = \frac{N}{N_R} \langle Y_M^L \rangle} \tag{43}$$

Si on ne tient pas compte du coefficient $N/N_R \geqslant 1$ la polarisation mesurée est plus faible que la polarisation vraie.

4 - Les coefficients C(L) pour $j \to j_1 + 0$.

41-Amplitude de transition pour les désintégrations $j \to j_1 + 0$.

La matrice de transition de la désintégration $j \to j_1 + 0$ s'écrit :

$$T(\theta,\varphi)^{m_1}{}_m = (<\underline{p}_2| \otimes <\{\underline{p}_1\}\, j_1 m_1|)\, T\, |\{\underline{p}\}\, jm> \qquad (44)$$

En étudiant les propriétés de transformation de cette amplitude pour les transformations du groupe de Lorentz on montre en appendice que l'on peut mettre cette amplitude sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} T(\theta,\varphi)^{m_1}{}_m &= D^{j_1}([\underline{p}_1]^{-1}\cdot\Lambda_{p\to p_1}\cdot[\underline{p}])^{m_1}{}_{n_1}\, T'(\theta,\varphi)^{n_1}{}_m \qquad (45a) \\ T'(\theta,\varphi)^{n_1}{}_m &= \sum_{\ell} \begin{pmatrix} j & \mu & n_1 \\ m & \ell & j_1 \end{pmatrix} A^{(\ell)}\, Y^{(\ell)}_{\mu}(\theta,\varphi) \qquad (45b) \end{aligned}}$$

La rotation de Wigner de la relation (45a) exprime la relation entre les tétrades $\{\underline{p}\} = [\underline{p}]\cdot\{\underline{t}\}$ et $\{\underline{p}_1\} = [\underline{p}_1]\cdot\{\underline{t}\}$.

Si on choisit les tétrades de façon que

$$\{\underline{p}_1\} = \Lambda_{\underline{p}\to\underline{p}_1}\cdot\{\underline{p}\}$$

cette rotation est l'identité et $T'(\theta,\varphi) = T(\theta,\varphi)$. Dans les autres cas l'amplitude $T'(\theta,\varphi)$ est "tournée" par rapport à $T(\theta,\varphi)$. Dans la formule (45b) nous avons mis en évidence les diverses dépendances de l'amplitude $T'(\theta,\varphi)^{n_1}{}_m$. La dépendance en (θ,φ) apparaît dans l'harmonique sphérique $Y^{(\ell)}_{\mu}(\theta,\varphi)$, la dépendance en n_1 et m apparaît dans le symbole -3j, enfin les quantités $A^{(\ell)}$ sont les amplitudes invariantes qui contiennent la dynamique de la désintégration. L'indice ℓ est le moment orbital des deux particules finales. Les valeurs possibles de ℓ sont les nombres entiers tels que

$$|j - j_1| \leq \ell \leq j + j_1 \qquad (46)$$

4.2-Les coefficients C(L).

Nous avons vu que le calcul des distributions angulaires se ramène au calcul de la matrice de désintégration

$$I(\omega) = \mathrm{Tr}_i\, \mathrm{Tr}_f \left[\tilde{O}(\omega)\, \rho\right] \tag{47a}$$

$$\tilde{O}(\omega) = \frac{O(\omega)}{D} \tag{47b}$$

$$O(\omega) = T(\omega)^* \otimes T(\omega) \tag{47c}$$

$$D = (2j+1)^{-1} \int_{\Omega} \mathrm{Tr}_i\, \mathrm{Tr}_f \left[O(\omega)\right] d\omega \tag{47d}$$

En appendice nous montrons qu'en utilisant la forme (45) de l'amplitude de transition on a (voir A 5) :

$$\mathrm{Tr}_f\, \tilde{O}(\theta, \varphi) = \sum_{L=0}^{2j} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} (T_M^{L*})\, Y_M^L(\theta, \varphi) \tag{48}$$

où les matrices T_M^L ont été définies au chapitre II et où le coefficient C(L) qui contient la dépendance dynamique a pour expression

$$C(L) = (-)^{j+j_1} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sqrt{2L+1} \sum_{\ell,\ell'} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \begin{Bmatrix} \ell & \ell' & L \\ j & j & j_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{A^{(\ell)} \bar{A}^{(\ell')}}{\sum_{\ell} |A^{\ell}|^2} \tag{49}$$

En utilisant le développement multipolaire de la matrice ρ étudié au chapitre II

$$\rho = \sum_{L'=0}^{2j} \frac{2L'+1}{2j+1} \sum_{M'=-L'}^{+L'} (T_{M'}^{(L')})\, \overline{t_{M'}^{(L')}} \tag{50}$$

et en utilisant la relation d'orthogonalité

$$\mathrm{Tr}(T_M^{(L)*}\, T_{M'}^{(L')}) = \frac{2j+1}{2L+1}\, \delta_{LL'}\, \delta_{MM'} \tag{51}$$

on obtient l'expression (34) où le coefficient C(L) est défini par l'expression (49).

On peut vérifier que le coefficient C(0) ne dépend pas de la dynamique de la désintégration. En effet, à cause du coefficient -3j, si L = 0 on a $\ell = \ell'$ et les coefficients -3j et -6j ont pour valeur :

$$\begin{Bmatrix} \ell & \ell & 0 \\ j & j & j_1 \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{j+j_1+\ell}}{\sqrt{(2j+1)(2\ell+1)}} \quad , \quad \begin{pmatrix} \ell & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{\ell}}{\sqrt{2\ell+1}}$$

et on obtient :

$$C(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} .$$

On peut aussi vérifier que si on a conservation de la parité les coefficients C(L) sont nuls si L est impair. En effet, si la désintégration conserve la parité, on doit avoir :

$$\eta = \eta_1 \eta_2 (-)^{\ell} \tag{52}$$

où η, η_1, η_2 sont les parités intrinsèques des particules et où ℓ est le moment orbital des particules finales. Donc, seules les amplitudes de même parité interviennent dans la désintégration, c'est-à-dire que l'on a $\ell + \ell'$ pair. Or, le coefficient -3j de la formule (49) est nul si $\ell + \ell' + L$ est impair, donc

$$C(L) \equiv 0 \quad \text{pour L impair.} \tag{53}$$

4.3-Calcul des coefficients C(L) pour certaines désintégrations du type $j \to j_1 + 0$.

Les coefficients C(L) dépendent de la dynamique de la désintégration par l'intermédiaire des amplitudes invariantes $A^{(\ell)}$. Par conservation du moment angulaire le nombre d'amplitudes qui contribuent à la désintégration est 2g + 1 où g est le minimum de j et j_1. Ce nombre est réduit si la désintégration conserve la parité. Pour certaines réactions, le nombre d'amplitudes est 1 ou 2. Dans ces cas le coefficient C(L) prend une forme simple que l'on peut aisément calculer et tabuler.

a) Désintégration où ne contribue qu'une seule amplitude.

Si une seule amplitude $A^{(\ell)}$ contribue à la désintégration, la dépendance dynamique s'élimine de l'expression de C(L), et on obtient :

$$C(L) = (-)^{j+j_1} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sqrt{2L+1}\, (2\ell+1) \begin{Bmatrix} \ell & \ell & L \\ j & j & j_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{54}$$

Il faut remarquer que dans ce cas les coefficients C(L), L impair, sont nuls, même s'il n'y a pas conservation de la parité.

Désintégration $j^{\eta} \rightarrow O^{\eta_1} + O^{\eta_2}$.

La conservation du moment angulaire impose $\ell = j$ et la désintégration n'est possible avec conservation de la parité que si on a $(-)^j = \eta\,\eta_1\eta_2$. En utilisant la formule

$$\begin{Bmatrix} j & j & L \\ j & j & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-)^{2j+L}}{2j+1}$$

on obtient :

$$C(L) = (-)^j \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (55)$$

Les valeurs des coefficients $\sqrt{4\pi}$ C(L) (L pair) pour j = 0, 4 sont données dans la table I.

Désintégration conservant la parité $j^{\eta} \rightarrow \frac{1}{2}^{\eta_1} + O^{\eta_2}$.

La conservation du moment angulaire impose $\ell = j \pm \frac{1}{2}$. On a donc deux amplitudes $A^{(\ell)}$ de parité $(-)^{\ell}$ opposées. Si la désintégration conserve la parité, une seule amplitude contribue. La valeur de ℓ dépend des parités relatives des particules. On doit avoir $(-)^{\ell} = \eta\,\eta_1\eta_2$.

La valeur du coefficient C(L) est calculée ci-dessous (voir 61). On obtient, pour L pair :

$$C(L) = (-)^{j-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} L & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (56)$$

Les valeurs du coefficient $\sqrt{4\pi}$ C(L) (L pair) pour $j = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$ sont données dans la table II.

Désintégration $j^{\eta} \rightarrow 1^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$ avec $\eta\,\eta_1\eta_2 = (-)^j$.

La conservation du moment angulaire impose ℓ = j+1, j, j-1. La conservation de la parité impose $\eta\,\eta_1\eta_2 = (-)^{\ell}$. Donc, seule l'amplitude $\ell = j$ contribue aux désintégrations qui conservent la parité. Le coefficient C(L) s'écrit :

$$C(L) = (-)^{j+1} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sqrt{2L+1}\,(2j+1) \begin{Bmatrix} j & j & L \\ j & j & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (57)$$

Les valeurs du coefficient $\sqrt{4\pi}\,C(L)$ (L pair) pour $j = 0, 4$ sont données dans la table III.

b) Désintégration où contribuent deux amplitudes.

Si deux amplitudes $A^{(\ell)}$ et $A^{(\ell')}$ contribuent à la désintégration, la dépendance dynamique ne s'élimine pas de l'expression du coefficient C(L). Un cas particulièrement important à considérer est celui des désintégrations qui violent la parité, du type $j \to \frac{1}{2} + 0$.

Désintégration $j \to \frac{1}{2} + 0$.

La conservation du moment angulaire impose $\ell = j + \frac{1}{2}\,,\ j - \frac{1}{2}$.
Le coefficient C(L) s'écrit :

$$C(L) = (-)^{j+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sqrt{2L+1} \sum_{\ell,\ell'=j\pm\frac{1}{2}} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \begin{Bmatrix} \ell & \ell' & L \\ j & j & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{A^{(\ell)}\bar{A}^{(\ell')}}{\sum_{\ell} |A^{(\ell)}|^2} \qquad (58)$$

En utilisant l'identité

$$\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \begin{Bmatrix} \ell & \ell' & L \\ j & j & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\left[\frac{1+(-)^{\ell+\ell'+L}}{2}\right] \begin{pmatrix} L & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (59)$$

et en définissant le paramètre d'asymétrie

$$\alpha = \frac{A^{j+\frac{1}{2}}\,\bar{A}^{j-\frac{1}{2}} + A^{j-\frac{1}{2}}\,\bar{A}^{j+\frac{1}{2}}}{\left|A^{j+\frac{1}{2}}\right|^2 + \left|A^{j-\frac{1}{2}}\right|^2} \qquad (60)$$

le coefficient C(L) peut s'écrire sous la forme :

$$C(L) = (-)^{j-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} L & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\left[1+(-)^{L}\right] + \alpha \left[1-(-)^{L}\right] \right) \qquad (61)$$

Toute la dépendance dynamique du coefficient C(L) est contenue dans le paramètre d'asymétrie α. Ce paramètre est réel. Il est nul si la désintégration conserve la parité, car alors une seule des deux amplitudes $A^{j+\frac{1}{2}}$, $A^{j-\frac{1}{2}}$ contribue à la désintégration.

Les valeurs du coefficient $\sqrt{4\pi}\, C(L)$ pour $j = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$ sont données dans la table IV.

<u>Désintégration conservant la parité $j^{\eta} \longrightarrow 1^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$ avec $\eta\eta_1\eta_2 = -(-)^j$.</u>

La conservation du moment angulaire impose $\ell = j+1, j, j-1$. La conservation de la parité impose $\eta\,\eta_1\eta_2 = (-)^{\ell}$. Donc les deux amplitudes $\ell = j+1$ et $\ell = j-1$ contribuent aux désintégrations qui conservent la parité. Nous définissons les paramètres dynamiques α et γ qui caractérisent la phase relative et l'intensité relative des deux amplitudes :

$$\alpha = 2\,\mathrm{Re}\,(A^{j+1}\bar{A}^{j-1})/(|A^{j-1}|^2 + |A^{j+1}|^2) \tag{62a}$$

$$\gamma = (|A^{j-1}|^2 - |A^{j+1}|^2)/(|A^{j-1}|^2 + |A^{j+1}|^2) \tag{62b}$$

<u>Remarque</u> : Pour $j = 0$, la conservation du moment angulaire et de la parité n'autorise qu'une seule amplitude, l'amplitude $A^{(1)}$. Dans ce cas on a $\alpha = 0$, $\gamma = -1$.

L'expression du coefficient C(L) en fonction de α et γ s'écrit :

$$\sqrt{4\pi}\, C(L) = (-)^{j+1}\sqrt{(2j+1)(2L+1)}\left[(2j+3)\begin{Bmatrix} j+1 & j+1 & L \\ j & j & 1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j+1 & j+1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1-\gamma}{2} + \right.$$
$$\left. + (2j-1)\begin{Bmatrix} j-1 & j-1 & L \\ j & j & 1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j-1 & j-1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1+\gamma}{2} + \sqrt{(2j+3)(2j-1)}\begin{Bmatrix} j+1 & j-1 & L \\ j & j & 1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j+1 & j-1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha\right] \tag{63}$$

La valeur du coefficient $\sqrt{4\pi}\, C(L)$ pour $j = 0, 3$ est donnée dans la table V.

Désintégration conservant la parité $j^{\eta} \longrightarrow \frac{3}{2}^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$.

La conservation du moment angulaire impose $\ell = j+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, j-\frac{3}{2}$. Les amplitudes $j+\frac{3}{2}$ et $j-\frac{1}{2}$ ont la parité : $(-)^{j-\frac{1}{2}}$, les amplitudes $j+\frac{1}{2}$, $j-\frac{3}{2}$ ont la parité opposée : $-(-)^{j-\frac{1}{2}}$. Si la désintégration conserve la parité un seul de ces deux couples d'amplitudes contribue à la désintégration :

i) Si $\eta\eta_1\eta_2 = (-)^{j-\frac{1}{2}}$ les amplitudes $A^{j+\frac{3}{2}}$ et $A^{j-\frac{1}{2}}$ contribuent. On définit les paramètres dynamiques α et γ qui caractérisent la phase relative et l'intensité relative des deux amplitudes :

$$\alpha = 2\,\mathrm{Re}\,(A^{j+\frac{3}{2}}\bar{A}^{j-\frac{1}{2}})/(|A^{j-\frac{1}{2}}|^2 + |A^{j+\frac{3}{2}}|^2) \tag{64a}$$

$$\gamma = (|A^{j-\frac{1}{2}}|^2 - |A^{j+\frac{3}{2}}|^2)/(|A^{j-\frac{1}{2}}|^2 + |A^{j+\frac{3}{2}}|^2) \tag{64b}$$

Remarque : Pour $j = \frac{1}{2}$ la conservation du moment et de la parité n'autorise qu'une seule amplitude, l'amplitude $A^{(2)}$. Dans ce cas on a $\alpha = 0$, $\gamma = -1$.

L'expression du coefficient C(L) en fonction de α et γ s'écrit :

$$\sqrt{4\pi}\,C(L) = (-)^{j+\frac{3}{2}}\sqrt{(2j+1)(2L+1)}\Bigg[(2j+4)\begin{Bmatrix} j+\frac{3}{2} & j+\frac{3}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2}\end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j+\frac{3}{2} & j+\frac{3}{2} & L \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1-\gamma}{2} +$$

$$+ 2j\begin{Bmatrix} j-\frac{1}{2} & j-\frac{1}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2}\end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j-\frac{1}{2} & j-\frac{1}{2} & L \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1+\gamma}{2} + \sqrt{(2j+4)(2j)}\begin{Bmatrix} j+\frac{3}{2} & j-\frac{1}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2}\end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j+\frac{3}{2} & j-\frac{1}{2} & L \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\alpha\Bigg] \tag{65}$$

La valeur du coefficient $\sqrt{4\pi}\,C(L)$ pour $j = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$ est donnée dans la table VI.

ii) Si $\eta\eta_1\eta_2 = -(-)^{j-\frac{1}{2}}$ les amplitudes $A^{j+\frac{1}{2}}$ et $A^{j-\frac{3}{2}}$ contribuent. On définit les paramètres dynamiques α et γ qui caractérisent la phase relative et l'intensité relative des deux amplitudes :

$$\alpha = 2\,\mathrm{Re}\,(A^{j+\frac{1}{2}}\bar{A}^{j-\frac{3}{2}})/(|A^{j+\frac{1}{2}}|^2 + |A^{j-\frac{3}{2}}|^2) \tag{66a}$$

$$\gamma = (|A^{j-\frac{3}{2}}|^2 - |A^{j+\frac{1}{2}}|^2)/(|A^{j-\frac{3}{2}}|^2 + |A^{j+\frac{1}{2}}|^2) \tag{66b}$$

Remarque : Pour $j = \frac{1}{2}$ la conservation du moment angulaire et de la parité n'autorise qu'une seule amplitude, l'amplitude $A^{(1)}$. Dans ce cas on a $\alpha = 0$, $\gamma = -1$.

L'expression du coefficient C(L) en fonction de α et γ s'écrit :

$$\sqrt{4\pi}\, C(L) = (-)^{j+\frac{3}{2}} \sqrt{(2j+1)(2L+1)} \left[(2j+2) \begin{Bmatrix} j+\frac{1}{2} & j+\frac{1}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j+\frac{1}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1-\gamma}{2} + \right.$$

$$\left. + (2j-2) \begin{Bmatrix} j-\frac{3}{2} & j-\frac{3}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j-\frac{3}{2} & j-\frac{3}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1+\gamma}{2} + \sqrt{(2j+2)(2j-2)} \begin{Bmatrix} j+\frac{1}{2} & j-\frac{3}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j-\frac{3}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha \right] \tag{67}$$

La valeur du coefficient $\sqrt{4\pi}\, C(L)$ pour $j = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$ est donnée dans la table VII.

Table I - Désintégration $j \longrightarrow 0 + 0$

a) Distribution angulaire de désintégration

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{L\,\text{pair}=2}^{2j} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t^{(L)}_{M}}\, Y^{(L)}_{M}(\theta, \varphi)$$

b) Coefficient C (L)

$$\sqrt{4\pi}\, C(L) = (-)^{j} \sqrt{(2j+1)(2L+1)} \begin{pmatrix} j & j & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Table du coefficient $\sqrt{4\pi}\, C(L)$

L \ j	0	1	2	3	4
2		$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{\frac{10}{7}}$	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	$-\sqrt{\frac{100}{77}}$
4			$\sqrt{\frac{18}{7}}$	$\sqrt{\frac{18}{11}}$	$\sqrt{\frac{1458}{1001}}$
6				$-\sqrt{\frac{100}{33}}$	$-\sqrt{\frac{20}{11}}$
8					$\sqrt{\frac{490}{143}}$

Table II - Désintégration conservant la parité $j^{\eta} \longrightarrow \frac{1}{2}^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$

a) Distribution angulaire de désintégration

$$I(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{L\,\text{pair}=2}^{2j-1} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t^{(L)}_M}\; Y^{(L)}_M(\theta,\varphi)$$

b) Coefficient C(L)

$$\sqrt{4\pi}\; C(L) = (-)^{j-\frac{1}{2}} \sqrt{(2j+1)(2L+1)} \begin{pmatrix} L & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Table du coefficient $\sqrt{4\pi}$ C(L)

L \ j	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
2		-1	$-\sqrt{\frac{8}{7}}$	$-\sqrt{\frac{25}{21}}$
4			$\sqrt{\frac{6}{7}}$	$\sqrt{\frac{81}{77}}$
6				$-\sqrt{\frac{25}{33}}$

Table III - Désintégration $j^{\eta} \longrightarrow 1^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$, avec $\eta\eta_1\eta_2 = (-)^j$, conservant la parité.

a) Distribution angulaire de désintégration

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{L\,\text{pair}=2}^{2j} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t_M^{(L)}}\, Y_M^{(L)}(\theta, \varphi)$$

b) Coefficient C(L)

$$\sqrt{4\pi}\, C(L) = (-)^{j+1} \sqrt{(2j+1)(2L+1)}\, (2j+1) \begin{Bmatrix} j & j & L \\ j & j & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j & j & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Table du coefficient $\sqrt{4\pi}\, C(L)$

L \ j	0	1	2	3	4
2		$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{5}{14}}$	$-\sqrt{\frac{3}{4}}$	$-\sqrt{\frac{289}{308}}$
4			$-\sqrt{\frac{8}{7}}$	$\sqrt{\frac{1}{22}}$	$\sqrt{\frac{729}{2002}}$
6				$\sqrt{\frac{75}{44}}$	$\sqrt{\frac{1}{220}}$
8					$-\sqrt{\frac{1568}{715}}$

Table IV - Désintégration $j^{\eta} \longrightarrow \frac{1}{2}^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$, violant la parité

a) Distribution angulaire de désintégration :

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{L=1}^{2j} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t_M^{(L)}}\, Y_M^{(L)}(\theta, \varphi)$$

b) Paramètre d'asymétrie :

$$\alpha = 2\,\mathrm{Re}\left(A^{j+\frac{1}{2}}\, \overline{A}^{j-\frac{1}{2}}\right) \Big/ \left(\left|A^{j+\frac{1}{2}}\right|^2 + \left|A^{j-\frac{1}{2}}\right|^2\right)$$

c) Coefficient C(L)

$$\sqrt{4\pi}\, C(L) = (-)^{j-\frac{1}{2}} \sqrt{(2j+1)(2L+1)} \begin{pmatrix} L & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\left[1+(-)^L\right] + \alpha \left[1-(-)^L\right] \right)$$

d) Table du coefficient $\sqrt{4\pi}\, C(L)$

L \ j	1/2	3/2	5/2	7/2
1	α	$\alpha\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\alpha\sqrt{\frac{3}{35}}$	$\alpha\sqrt{\frac{1}{21}}$
2		-1	$-\sqrt{\frac{8}{7}}$	$-\sqrt{\frac{25}{21}}$
3		$-\alpha\sqrt{\frac{9}{5}}$	$-\alpha\sqrt{\frac{8}{15}}$	$-\alpha\sqrt{\frac{3}{11}}$
4			$\sqrt{\frac{6}{7}}$	$\sqrt{\frac{81}{77}}$
5			$\alpha\sqrt{\frac{50}{21}}$	$\alpha\sqrt{\frac{75}{91}}$
6				$-\sqrt{\frac{25}{33}}$
7				$-\alpha\sqrt{\frac{1225}{429}}$

Table V - Désintégration conservant la parité $j^{\eta} \longrightarrow 1^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$ avec $\eta\,\eta_1\,\eta_2 = -(-)^j$

a) Distribution angulaire

$$I(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{L\,\text{pair}=2}^{2j} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t_M^{(L)}}\; Y_M^{(L)}(\theta,\varphi)$$

b) Paramètres dynamiques

$$j \geqslant 1 \quad \begin{cases} \alpha = 2\,\mathrm{Re}\,(A^{j+1}\,\overline{A}^{j-1})/(|A^{j-1}|^2 + |A^{j+1}|^2) \\ \gamma = (|A^{j-1}|^2 - |A^{j+1}|^2)/(|A^{j-1}|^2 + |A^{j+1}|^2 \end{cases} \qquad j = 0 \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

c) Coefficient C(L)

$$\sqrt{4\pi}\,C(L) = (-)^{j+1}\sqrt{(2j+1)(2L+1)}\left[(2j+3)\begin{Bmatrix} j+1 & j+1 & L \\ j & j & 1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j+1 & j+1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1-\gamma}{2} + \right.$$

$$\left. + (2j-1)\begin{Bmatrix} j-1 & j-1 & L \\ j & j & 1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j-1 & j-1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1+\gamma}{2} + \sqrt{(2j+3)(2j-1)}\begin{Bmatrix} j+1 & j-1 & L \\ j & j & 1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} j+1 & j-1 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\alpha\right]$$

d) Table du coefficient $\sqrt{4\pi}\,C(L) = C_+ \frac{1+\gamma}{2} + C_- \frac{1-\gamma}{2} + C_o\,\alpha$

L \ j	0	1			2			3		
		C_+	C_-	C_o	C_+	C_-	C_o	C_+	C_-	C_o
2		0	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$-\sqrt{\frac{7}{10}}$	$-\sqrt{\frac{32}{35}}$	$\sqrt{\frac{3}{35}}$	$-\sqrt{\frac{48}{49}}$	$-\sqrt{\frac{625}{588}}$	$\frac{1}{7}$
4					0	$\sqrt{\frac{2}{7}}$	$-\sqrt{\frac{12}{7}}$	$\sqrt{\frac{22}{49}}$	$\sqrt{\frac{729}{1078}}$	$-\sqrt{\frac{150}{539}}$
6								0	$-\sqrt{\frac{25}{132}}$	$\sqrt{\frac{25}{11}}$

Table VI - Désintégration conservant la parité $j^{\eta} \to \frac{3}{2}^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$ avec $\eta\,\eta_1\eta_2 = (-)^{j-\frac{1}{2}}$

a) Distribution angulaire

$$I(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{L\,\text{pair}=2}^{2j-1} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t^{(L)}_M}\; Y^{(L)}_M(\theta,\varphi)$$

b) Paramètres dynamiques

$$j \geq \frac{3}{2} \quad \begin{cases} \alpha = 2\,\mathrm{Re}\left(A^{j+\frac{3}{2}}\,\bar{A}^{j-\frac{1}{2}}\right) / \left(\left|A^{j+\frac{3}{2}}\right|^2 + \left|A^{j-\frac{1}{2}}\right|^2\right) \\ \gamma = \left(\left|A^{j-\frac{1}{2}}\right|^2 - \left|A^{j+\frac{3}{2}}\right|^2\right) / \left(\left|A^{j+\frac{3}{2}}\right|^2 + \left|A^{j-\frac{1}{2}}\right|^2\right) \end{cases} \qquad j = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

c) Coefficient C(L)

$$\sqrt{4\pi}\, C(L) = (-)^{j+\frac{3}{2}} \sqrt{(2j+1)(2L+1)} \left[(2j+4) \begin{Bmatrix} j+\frac{3}{2} & j+\frac{3}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j+\frac{3}{2} & j+\frac{3}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1-\gamma}{2} + \right.$$

$$\left. + 2j \begin{Bmatrix} j-\frac{1}{2} & j-\frac{1}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j-\frac{1}{2} & j-\frac{1}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1+\gamma}{2} + \sqrt{(2j+4)(2j)} \begin{Bmatrix} j+\frac{3}{2} & j-\frac{1}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j+\frac{3}{2} & j-\frac{1}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha \right]$$

d) Table du coefficient $\sqrt{4\pi}\, C(L) = C_+ \frac{1+\gamma}{2} + C_- \frac{1-\gamma}{2} + C_o\,\alpha$

L \ j	1/2	3/2			5/2			7/2		
		C_+	C_-	C_o	C_+	C_-	C_o	C_+	C_-	C_o
2		$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\sqrt{\frac{50}{343}}$	$-\sqrt{\frac{625}{686}}$	$\sqrt{\frac{27}{343}}$	$-\sqrt{\frac{100}{189}}$	$-\sqrt{\frac{28}{27}}$	$\sqrt{\frac{5}{189}}$
4					$-\sqrt{\frac{384}{343}}$	$\sqrt{\frac{243}{686}}$	$-\sqrt{\frac{225}{343}}$	$-\sqrt{\frac{1}{77}}$	$\sqrt{\frac{7}{11}}$	$-\sqrt{\frac{20}{77}}$
6								$\sqrt{\frac{400}{297}}$	$-\sqrt{\frac{64}{297}}$	$\sqrt{\frac{245}{297}}$

Table VII - Désintégration conservant la parité $j^{\eta} \rightarrow \frac{3}{2}^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$ avec $\eta\eta_1\eta_2 = -(-)^{j-\frac{1}{2}}$

a) Distribution angulaire

$$I(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{L\,\text{pair}=2}^{2j-1} C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{t^{(L)}_M}\, Y^{(L)}_M(\theta,\varphi)$$

b) Paramètres dynamiques

$$j \geqslant \frac{3}{2} \begin{cases} \alpha = 2\,\mathrm{Re}\,(A^{j+\frac{1}{2}} \bar{A}^{j-\frac{3}{2}})/(|A^{j+\frac{1}{2}}|^2 + |A^{j-\frac{3}{2}}|^2) \\ \gamma = (|A^{j+\frac{1}{2}}|^2 - |A^{j-\frac{3}{2}}|^2)/(|A^{j+\frac{1}{2}}|^2 + |A^{j-\frac{3}{2}}|^2) \end{cases} \qquad j = \frac{1}{2} \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

c) Coefficient C(L)

$$\sqrt{4\pi}\, C(L) = (-)^{j+\frac{3}{2}} \sqrt{(2j+1)(2L+1)} \Bigg[(2j+2) \begin{Bmatrix} j+\frac{1}{2} & j+\frac{1}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j+\frac{1}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1-\gamma}{2} +$$

$$+ (2j-2) \begin{Bmatrix} j-\frac{3}{2} & j-\frac{3}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j-\frac{3}{2} & j-\frac{3}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1+\gamma}{2} + \sqrt{(2j+2)(2j-2)} \begin{Bmatrix} j+\frac{1}{2} & j-\frac{3}{2} & L \\ j & j & \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j+\frac{1}{2} & j-\frac{3}{2} & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha \Bigg]$$

d) Table du coefficient $\sqrt{4\pi}\, C(L) = C_+ \frac{1+\gamma}{2} + C_- \frac{1-\gamma}{2} + C_o \alpha$

L \ j	1/2	3/2			5/2			7/2		
		C_+	C_-	C_o	C_+	C_-	C_o	C_+	C_-	C_o
2		0	0	1	$-\sqrt{\frac{14}{25}}$	$-\sqrt{\frac{121}{350}}$	$\sqrt{\frac{27}{175}}$	$-\sqrt{\frac{300}{343}}$	$-\sqrt{\frac{676}{1029}}$	$\sqrt{\frac{15}{343}}$
4					0	$-\sqrt{\frac{3}{14}}$	$-\sqrt{\frac{9}{7}}$	$\sqrt{\frac{99}{343}}$	$\sqrt{\frac{81}{3773}}$	$-\sqrt{\frac{1620}{3773}}$
6								0	$\sqrt{\frac{16}{33}}$	$\sqrt{\frac{15}{11}}$

PARTIE I - APPENDICE 5

CALCUL DES COEFFICIENTS C(L)

Le but de cet appendice est de montrer les étapes du calcul qui permet

a) de passer de la définition (44) de la matrice de transition à la forme (45)

b) de passer de cette forme (45) et de la définition (47 b, c, d) de la matrice de désintégration à la forme (48) et à l'expression (49) du coefficient C(L).

1 - Amplitudes "tournées" $T'(\omega)$.

L'invariance pour les transformations du groupe de Poincaré de la matrice de transition $T(\omega)$ définie par (44) s'écrit :

$$\mathcal{U}(a,\Lambda)\, T(\omega)\, \mathcal{U}(a,\Lambda)^{*} = T(\omega) \tag{1}$$

En utilisant la loi de transformation des vecteurs d'état :

$$\mathcal{U}(\underline{a},\Lambda)|\{\underline{p}\}\, j\, m> \; = \; e^{i\underline{a}\cdot\Lambda\underline{p}}|\{\Lambda\underline{p}\}\, j\, m'>\, D^{(j)}([\Lambda\underline{p}]^{-1}\Lambda[\underline{p}])^{m'}{}_{m} \tag{2}$$

et la conservation de l'énergie-umpulsion

$$\underline{p} - \underline{p}_1 - \underline{p}_2 = 0 \tag{3}$$

la loi de transformation de $T(\omega)^{m_1}{}_{m}$ s'écrit :

$$T(\omega)^{m_1}{}_{m} = D^{(j_1)}([\underline{p}_1]^{-1}\Lambda^{-1}[\Lambda\underline{p}_1])^{m_1}{}_{m'_1}\, T(\Lambda\omega)^{m'_1}{}_{m'}\, D^{(j)}([\Lambda\underline{p}]^{-1}\Lambda[\underline{p}])^{m'}{}_{m}, \tag{4}$$

où nous avons défini :

$$T(\Lambda\omega)^{m'_1}{}_{m'} = (<\Lambda\underline{p}_2|\otimes<\{\Lambda\underline{p}_1\}\; j_1\, m'_1|)\; T\,|\{\Lambda\underline{p}\}\; j\, m'>. \tag{5}$$

En utilisant la relation de conjugaison des transformations de Lorentz pures ǂ $\Lambda_{p_1\rightarrow p}$ et $\Lambda_{\Lambda p_1\rightarrow \Lambda p}$ par la transformation Λ :

$$\Lambda \, . \, \Lambda_{p_1\rightarrow p} \, . \, \Lambda^{-1} = \Lambda_{\Lambda p_1\rightarrow \Lambda p} \tag{6}$$

on peut vérifier la relation suivante :

$$([\underline{p}_1]^{-1}\Lambda^{-1}[\Lambda\underline{p}_1]) = ([\underline{p}_1]^{-1}\Lambda^{-1}_{p_1\rightarrow p}[\underline{p}])([\underline{p}]^{-1}\Lambda^{-1}[\Lambda\underline{p}])([\Lambda\underline{p}]^{-1}\Lambda_{\Lambda p_1\rightarrow\Lambda p}[\Lambda\underline{p}_1]) \tag{7}$$

En portant cette relation dans l'équation (4) et en définissant les amplitudes "tournées" $T'(\omega)$:

$$D^{(j_1)}([\underline{p}]^{-1}\Lambda_{p_1\rightarrow p}[\underline{p}_1])^{n_1}{}_{m_1}\, T(\omega)^{m_1}{}_{m} = T'(\omega)^{n_1}{}_{m} \tag{8a}$$

$$D^{(j_1)}([\Lambda\underline{p}]^{-1}\Lambda_{\Lambda p_1\rightarrow\Lambda p}[\Lambda\underline{p}_1])^{n'_1}{}_{m'_1}\, T(\Lambda\omega)^{m'_1}{}_{m'} = T'(\Lambda\omega)^{n'}{}_{m'} \tag{8b}$$

on obtient la loi de transformation de ces amplitudes "tournées" :

$$T'(\omega)^{n_1}{}_{m} = D^{(j_1)}([\underline{p}]^{-1}\Lambda^{-1}[\Lambda\underline{p}])^{n_1}{}_{n'_1}\, T'(\Lambda\omega)^{n'_1}{}_{m'} D^{(j)}([\Lambda\underline{p}]^{-1}\Lambda[\underline{p}])^{m'}{}_{m} \tag{9}$$

Les relations (8) de définition des amplitudes tournées s'inversent facilement :

$$T(\omega)^{m_1}{}_{m} = D^{(j_1)}([\underline{p}_1]^{-1}\Lambda^{-1}_{p_1\rightarrow p}[\underline{p}])^{m_1}{}_{n_1}\, T'(\omega)^{n_1}{}_{m} \tag{10}$$

c'est la relation (45a).

ǂ Si $\underline{a}^2 = \underline{b}^2 = 1$ et $a^o > 0$, $b^o > 0$ on appelle transformation de Lorentz pure $\Lambda_{a\rightarrow b}$ la transformation du groupe de Lorentz qui transforme $\underline{a}$ en $\underline{b}$ et laisse fixes les vecteurs du 2-plan orthogonal au 2-plan engendré par $\underline{a}$ et $\underline{b}$:

$$\Lambda_{a\rightarrow b} = I - \frac{(\underline{a}+\underline{b})\otimes(\underline{a}+\underline{b})}{1+\underline{a}\,.\,\underline{b}} + 2\,\underline{b}\otimes\underline{a}$$

2 - Amplitudes irréductibles $A(\omega)^{(\ell)}_{\mu}$.

En utilisant la formule de réduction I A1-(21) et en multipliant les deux membres de l'équation (9) par le symbole -3j

$$\begin{pmatrix} m & \ell & j_1 \\ j & \mu & n_1 \end{pmatrix}$$

et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des symboles -3j nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} m & \ell & j_1 \\ j & \mu & n_1 \end{pmatrix} T'(\omega)^{n_1}{}_{m} = \begin{pmatrix} m' & \ell & j_1 \\ j & \mu' & n'_1 \end{pmatrix} T'(\Lambda\omega)^{n'_1}{}_{m'}\, D^{(\ell)}([\Lambda p]^{-1}\Lambda[p])^{\mu'}{}_{\mu} \qquad (11)$$

Donc les quantités $A(\omega)^{(\ell)}_{\mu}$ définies par

$$A(\omega)^{(\ell)}_{\mu} = (-)^{2j}(2\ell+1)\begin{pmatrix} m & \ell & j_1 \\ j & \mu & n_1 \end{pmatrix} T'(\omega)^{n_1}{}_{m} \qquad (12a)$$

$$A(\Lambda\omega)^{(\ell)}_{\mu'} = (-)^{2j}(2\ell+1)\begin{pmatrix} m' & \ell & j_1 \\ j & \mu' & n'_1 \end{pmatrix} T'(\Lambda\omega)^{n'_1}{}_{m'} \qquad (12b)$$

se transforment comme les composantes d'un tenseur irréductible :

$$A(\omega)^{(\ell)}_{\mu} = A(\Lambda\omega)^{(\ell)}_{\mu'}\, D^{(\ell)}([\Lambda p]^{-1}\Lambda[p])^{\mu'}{}_{\mu} \qquad (13)$$

Les $2\ell+1$ quantités $A(\omega)^{(\ell)}_{\mu}$ sont appelées "amplitudes irréductibles". Les relations (12) de définition des amplitudes irréductibles s'inversent facilement en utilisant les propriétés d'orthogonalité des symboles -3j ; on obtient :

$$T'(\omega)^{n_1}{}_{m} = \sum_{\ell=|j-j_1|}^{j+j_1} \begin{pmatrix} j & \mu & n_1 \\ m & \ell & j_1 \end{pmatrix} A(\omega)^{(\ell)}_{\mu}. \qquad (14)$$

3 - Amplitudes invariantes $A^{(\ell)}$.

Dans le cas d'une désintégration à deux corps la variable d'espace de phase ω représente les angles θ et φ. Les amplitudes irréductibles $A(\omega)^{(\ell)}_{\mu}$ peuvent être développées sur la base des harmoniques sphériques $Y^{(\ell)}_{\mu}(\theta, \varphi)$. D'après la loi de transformation (13) des amplitudes irréductibles on observe que la fonction $A(\theta,\varphi)^{(\ell)}_{\mu}$ est proportionnelle à $Y^{(\ell)}_{\mu}(\theta,\varphi)$:

$$A(\theta,\varphi)^{(\ell)}_{\mu} = A^{(\ell)}\, Y^{(\ell)}_{\mu}(\theta,\varphi) \tag{15}$$

les coefficients de proportionnalité $A^{(\ell)}$ étant des nombres complexes indépendants de θ et φ . Ce sont les amplitudes invariantes ; elles décrivent la dynamique de la désintégration.
En portant (15) dans (14) on obtient la relation (45b) du texte.

4 - Calcul de $Tr_f\, O(\omega)$.

On définit la matrice de désintégration "tournée" :

$$O'(\omega) = T'(\omega)^{*} \otimes T'(\omega) \tag{16}$$

En utilisant la définition (47c) et la forme (45a) de l'amplitude $T(\omega)$ on peut écrire :

$$\left[O(\omega)^{m_1}{}_{m'_1}\right]^{m'}{}_{m} = D^{(j_1)}\left([p]^{-1}\Lambda_{p\to p_1}[p]\right)^{m_1}{}_{n_1}\left[O'(\omega)^{n_1}{}_{n'_1}\right]^{m'}{}_{m}$$
$$D^{(j_1)}\left([p_1]^{-1}\Lambda^{-1}_{p\to p_1}[p]\right)^{m'_1}{}_{m'_1} \tag{17}$$

En prenant la trace dans l'espace final on obtient :

$$\left[O(\omega)^{m_1}{}_{m_1}\right]^{m'}{}_{m} = \left[O'(\omega)^{n_1}{}_{n_1}\right]^{m'}{}_{m} \tag{18}$$

i. e.

$$Tr_f\, O(\omega) = Tr_f\, O'(\omega) \tag{18'}$$

En utilisant la forme (45b) de $T'(\omega)$ et la formule de réduction du produit de deux harmoniques sphériques :

$$Y^{(\ell)}_{\mu}(\theta,\varphi)\,\overline{Y^{(\ell')}_{\mu'}(\theta,\varphi)} = \sum_{L}\sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)(2L+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix}0 & \ell' & L\\ \ell & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell & \mu' & M\\ \mu & \ell' & L\end{pmatrix} Y^{(L)}_{M}(\theta,\varphi) \tag{19}$$

et l'identité I A1-(27) entre symboles -3j et -6j on obtient :

$$\mathrm{Tr}_f\left[O(\omega)\right]^{m'}{}_{m} = (-)^{j+j_1} \sum_L \sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)(2L+1)}{4\pi}}\,(-)^L \begin{pmatrix} m' & M & j \\ j & L & m \end{pmatrix} Y^{(L)}_M(\theta,\varphi)$$

$$\times \begin{Bmatrix} \ell & \ell' & L \\ j & j & j_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^{(\ell)}\,\overline{A^{(\ell')}} \tag{20}$$

5 - Calcul de D.

Le coefficient D est défini en (47d). En utilisant les relations :

$$\sum_m \begin{pmatrix} m & M & j \\ j & L & m \end{pmatrix} = \sqrt{2j+1}\ \delta_{L0}\,\delta_{M0}\ , \tag{21}$$

$$\int Y^{(o)}_o(\omega)\,d\omega = \sqrt{4\pi}\ , \tag{22}$$

et les relations I A1-(23) et (28) on obtient :

$$D = \frac{1}{2j+1} \sum_\ell \left| A^{(\ell)} \right|^2 \tag{23}$$

6 - Calcul de $\mathrm{Tr}_f\,\tilde{O}(\omega)$.

En I. 2-(28) nous avons défini les matrices $T^{(L)}_M$. En utilisant I. 2-(33) on obtient :

$$(-)^L \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} m' & M & j \\ j & L & m \end{pmatrix} = (T^{(L)*}_M)^{m'}{}_{m} \tag{24}$$

En portant (24), (23) et (20) dans la définition

$$\mathrm{Tr}_f\,\tilde{O}(\omega) = \frac{1}{D}\,\mathrm{Tr}_f\,O(\omega) \tag{25}$$

on obtient finalement les relations (48) et (49) du texte.