

## Troisième Partie

### AUTRES APPLICATIONS

Dans la deuxième partie nous avons étudié les états de polarisation d'une particule de masse non nulle et spin déterminés. Par la même méthode nous pouvons traiter le cas des particules de masse nulle, des particules "hors de leur couche de masse", des états de superposition de spins et aussi les états de deux particules et plus. De même nous pouvons considérer les réactions avec cible et/ou faisceau polarisés. Nous traiterons tous ces problèmes dans nos fascicules "Polarization density matrix". De tout ce programme nous avons traité brièvement à l'Ecole de Gif les deux sujets suivants :

- Superposition de deux spins.
- Corrélations de polarisation pour deux particules.

Ces notes de cours les développent un peu plus et traitent pour chaque sujet un exemple concret :

au chapitre 1 : superposition des spins 1 et 0 ;

au chapitre 2 : polarisation des états de deux particules de spin  $\frac{1}{2}$  .

Chapitre 1 :

## SUPERPOSITION DE SPINS

0. Introduction -

Dans les parties précédentes nous avons toujours supposé que les particules et résonances hadroniques que nous étudions ont une masse et un spin bien déterminés. De plus, nous avons fait des hypothèses sur la dynamique des interactions de production de ces particules. En particulier nous avons supposé que la parité est conservée, ce qui impose des conditions sur l'état de polarisation des particules produites. Par exemple, pour une réaction B-symétrique (voir Partie I, chapitre 3), si on quantifie selon la normale au plan de production, les paramètres multipolaires  $T_{tM}^{(L)}$  avec M impair, sont identiquement nuls.

Si expérimentalement on observe que pour certaines réactions ces conditions ne sont pas satisfaites, cela signifie que l'une, au moins, des hypothèses que nous avons faites doit être rejetée. Avant de rejeter l'hypothèse de la conservation de la parité dans les interactions fortes, il convient de s'assurer que les autres hypothèses ne doivent pas être réexaminées, en particulier l'hypothèse que le spin des particules est bien déterminé.

En effet, les résonances hadroniques apparaissent comme des "bosses" dans la distribution de masse invariante de deux (ou trois) particules finales. Par exemple le  $\rho^0$  est une "bosse" dans la distribution de masse invariante des  $2\pi$  finaux de la réaction



Les résonances hadroniques n'apparaissent donc pas comme des objets isolés. Elles se désintègrent à l'intérieur de la région d'interaction de la réaction nucléaire qui les a produites. Aussi l'approximation qui consiste à

donner à ces objets une masse et un spin déterminés peut être inadéquate. †

Une étude complète des résonances hadroniques consisterait à faire une analyse en ondes partielles de l'état des  $2\pi$  finaux. Le plus souvent on simplifie le problème en faisant l'hypothèse qu'une seule onde prédomine, c'est-à-dire que la résonance a un spin déterminé, et que le fond peut être soustrait parce qu'il n'interfère pas avec la résonance. Dans ce chapitre nous allons adopter une position intermédiaire en considérant l'état des  $2\pi$  comme une superposition cohérente de deux ondes : une onde principale, celle de la résonance, et une onde plus faible, celle du fond, que nous supposerons de moment angulaire  $\ell = 0$ . Nous montrons que l'interférence entre ces deux ondes peut simuler une violation de la parité dans les réactions de production et de désintégration de la résonance.

Nous traitons en détail le cas de l'interférence d'un spin 1 et d'un spin 0, mais le formalisme que nous développons dans les sections 1 à 5 permet de traiter de la même façon la superposition de deux spins quelconques ou la superposition de plusieurs spins.

---

†

Par contre pour les  $\rho^0$  produits dans les anneaux de collision ( $e^+, e^-$ ) l'approximation qui consiste à les considérer comme des particules isolées est beaucoup plus acceptable. On vérifie d'ailleurs que la bosse de la résonance est très fine et n'est pas déformée.

1. Matrice densité d'une superposition de plusieurs spins -

Nous étudions une réaction générale à quasi-deux corps du type



où la "particule"  $\{S\}$  est une superposition cohérente de  $\mathcal{N}$  spins. C'est-à-dire que cet objet a une masse bien définie (à une certaine largeur près) mais que son spin n'est pas défini. Nous notons  $J_i$  ( $i=1, \dots, \mathcal{N}$ ) les valeurs des spins qui apparaissent dans la superposition. <sup>†</sup> Par la suite nous noterons  $j, j', \hat{j}, \hat{j}', \hat{j}, \hat{j}'$  des variables qui prennent leurs valeurs dans l'ensemble des  $J_i$ .

1.1. Matrice de transition.

La matrice de transition de la réaction (1), pour des particules de spin et de parité bien définis, a été étudiée dans le chapitre I.3. Nous la notons

$$T_{m_A m_B}^{m_S m_D}$$

. Si la "particule"  $\{S\}$  est une superposition de  $\mathcal{N}$  spins,

nous devons considérer une matrice de transition dépendant du spin. Nous la notons

$$T_{m_A m_B}^{\hat{j} m m_D} \quad (2)$$

où  $\hat{j}$  varie de  $J_1$  à  $J_{\mathcal{N}}$  et pour  $\hat{j}$  fixé,  $m$  varie de  $-\hat{j}$  à  $+\hat{j}$ .

1.2. Matrice densité.

La matrice densité, non normalisée  $\rho(S, D)$ , de la superposition de spins  $\{S\}$  et de la particule  $D$  est obtenue en faisant le produit :

$$\rho(S, D) = T \rho_i T^* \quad (3)$$

où  $\rho_i$  est la matrice densité des particules initiales. Si les particules initiales

†

Les spins  $J_i$  ne sont pas obligatoirement tous différents; on peut avoir la superposition de deux spins égaux mais de parités différentes.

ne sont pas polarisées, et si on n'observe pas la polarisation de la particule D, la matrice densité de la superposition s'écrit :

$$\rho_{\hat{j}'m'}^{\hat{j}m} = T_{m_A m_B}^{\hat{j}m m_D} T_{\hat{j}'m' m_D}^{*m_A m_B} \quad (4)$$

Les lignes de cette matrice sont caractérisées par les indices  $\hat{j}$  et  $m$ , et les colonnes par les indices  $\hat{j}'$  et  $m'$ . Pour ordonner les lignes et les colonnes on fait d'abord varier les indices  $\hat{j}$  et  $\hat{j}'$  sur leur domaine de variation  $J_1 \dots J_N$ , et pour  $\hat{j}$  et  $\hat{j}'$  fixés, on fait varier les indices  $m$  de  $-\hat{j}$  à  $+\hat{j}$  et  $m'$  de  $-\hat{j}'$  à  $+\hat{j}'$ . La dimension  $n_S$  de cette matrice carrée est donc :

$$n_S = \sum_{i=1}^N (2J_i + 1) \quad (5)$$

### 1.3. Conditions à la production . B-symétrie .

Dans le chapitre I.3. nous avons étudié les conditions imposées à la matrice de transition et à la matrice densité par l'invariance pour la symétrie  $S_n$  par rapport au plan de la réaction, appelée aussi B-symétrie. Ces conditions se généralisent très facilement au cas de la superposition de spins. Nous notons  $\eta_j$  la parité intrinsèque de l'état de spin  $j$  apparaissant dans la "particule"  $\{S\}$ . Si on quantifie selon la normale au plan de la réaction (transversité) on a la condition, analogue à I A3-(14) :

$$T_{m_A m_B}^{\hat{j}m m_D} = \eta_A \eta_B \eta_j \eta_D (-)^{m_A + m_B - m - m_D} T_{m_A m_B}^{\hat{j}m m_D} \quad (6)$$

d'où on déduit, d'après la définition (4) :

$$\rho_{\hat{j}'m'}^{\hat{j}m} = \eta_{\hat{j}} \eta_{\hat{j}'} (-)^{m-m'} \rho_{\hat{j}'m'}^{\hat{j}m} \quad (7)$$

(transversité)

C'est-à-dire que l'on a :

$$\eta_{\hat{j}} \eta_{\hat{j}'} (-)^{m-m'} = -1 \Rightarrow \rho_{\hat{j}'m'}^{\hat{j}m} = 0 \quad (8)$$

c'est une condition de "damier" généralisée, voir I A3.

Si on quantifie selon un axe dans le plan de la réaction (hélicité), on a la condition, analogue à I A3-(17) :

$$T_{m_A m_B}^{\hat{j} m_D} = \eta_A \eta_B \eta_j \eta_D^{(-)} j_A^{-m_A} j_B^{-m_B} j^{+m-j} j_D^{+m} \times T_{-m_A, -m_B}^{\hat{j}, -m, -m_D} \quad (9)$$

d'où on déduit, d'après la définition (4) :

$$\rho_{\hat{j} m}^{\hat{j} m} = \eta_{\hat{j}} \eta_{\hat{j}'}^{(-)} (-)^{\hat{j}-\hat{j}'} (-)^{m-m'} \rho_{\hat{j}', -m'}^{\hat{j}, -m} \quad (10)$$

(hélicité)

Les conditions (7) et (10) seront appelées "conditions de B-symétrie" pour la matrice densité de la superposition de spins.

#### 1.4. Exemple : superposition des spins $1^-$ et $0^+$ .

Considérons les réactions du type

$$0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1^- \\ 0^+ \end{array} \right\} + \frac{1^+}{2} \quad (11)$$

où la "particule"  $\{S\}$  est une superposition de deux états de spins 1 et 0 et de parités opposées. C'est le cas de la superposition de spins pour les  $\rho^0$  produits dans la réaction



Si on quantifie selon la normale au plan de production, d'après la condition (6), la matrice de transition a la structure suivante :

$$T_{\hat{j}m m_D}^{m_B} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 0 & a & (0) & 0 & \\ \hline 0 & b & & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline c & 0 & (1) & 0 & \\ \hline 0 & d & & -1 & \\ \hline e & 0 & (0) & 0 & \\ \hline f & 0 & & 1 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & g & (1) & 0 & \\ \hline h & 0 & & -1 & \\ \hline m_B = & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \hat{j} & m \quad m_D \\ \hline \end{array} \quad (12)$$

où les nombres complexes  $a, \dots, h$  sont les amplitudes de transversité à cinématique fixée. Pour construire cette matrice nous considérons  $m_B$  comme indice de colonnes et le triplet  $(\hat{j}, m, m_D)$  comme indice de ligne.

En utilisant la définition (4), la matrice densité de la superposition  $\{1^-, 0^+\}$  a la forme :

$$\rho_{\hat{j}m, \hat{j}'m'} =$$

	$ a ^2 +  e ^2$	$a\bar{b} + e\bar{f}$	0	$a\bar{d} + e\bar{h}$	(0)	0
	$b\bar{a} + f\bar{e}$	$ b ^2 +  f ^2$	0	$b\bar{d} + f\bar{h}$		1
	0	0	$ c ^2 +  g ^2$	0	(1)	0
	$d\bar{a} + h\bar{e}$	$d\bar{b} + h\bar{f}$	0	$ d ^2 +  h ^2$		-1
$\hat{j}'$	(0)	(1)			$\hat{j}$	m
m'	0	1	0	-1		

(13)

On vérifie sur cette matrice que les conditions (7) de "damier" généralisé sont satisfaites.

Si on quantifie selon une direction du plan de la réaction, d'après la condition (9) la matrice de transition a la structure suivante :

$$T_{\hat{j}m m_D, m_B} =$$

a'	b'
c'	d'
e'	f'
g'	h'
b'	-a'
-h'	g'
f'	-e'
-d'	c'

(14)

où les nombres complexes  $a', \dots, h'$  sont les amplitudes d'hélicité à cinématique fixée. La numérotation des lignes et des colonnes est identique à celle de la matrice (12).

La matrice densité correspondante s'écrit :

$$\rho_{\hat{j}m, \hat{j}'m'}^{jm} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2(|a'|^2 + |b'|^2) & a'(\bar{c}' - \bar{g}') \\ + b'(\bar{d}' - \bar{h}') & 2(a'\bar{e}' + b'\bar{f}') \\ & a'(\bar{g}' - \bar{c}') \\ & + b'(\bar{h}' - \bar{d}') \\ \hline \text{h.c.} & |c'|^2 + |d'|^2 \\ + |h'|^2 + |g'|^2 & (c' - g')\bar{e}' \\ + (d' - h')\bar{f}' & c'\bar{g}' + g'\bar{c}' \\ & + d'\bar{h}' + h'\bar{d}' \\ \hline \text{h.c.} & \text{h.c.} & 2(|e'|^2 + |f'|^2) & e'(\bar{g}' - \bar{c}') \\ & & & + f'(\bar{h}' - \bar{d}') \\ \hline \text{h.c.} & \text{h.c.} & \text{h.c.} & |c'|^2 + |d'|^2 \\ & & & + |g'|^2 + |h'|^2 \\ \hline \end{array} \quad (15)$$

la numérotation des lignes et des colonnes étant identique à celle de la matrice (13). On vérifie sur cette matrice les conditions (10) de B-symétrie.

2. Paramétrisation multipolaire de la matrice densité de la superposition de plusieurs spins.

2.1. Les matrices  $jj' T_M^{(L)}$ .

Comme nous l'avons vu, la matrice densité de polarisation d'une "particule" superposition de  $\mathcal{N}$  spins  $J_i$  est une matrice hermitique de dimension  $n_S = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (2J_i+1)$ , et nous notons ses éléments  $\rho_{\hat{j},m; \hat{j}',m'}^{jm}$ . Dans le chapitre I. 2, nous avons étudié les paramètres multipolaires  $t_M^{(L)}$  des matrices densité. Pour cela nous avons défini les matrices  $T_M^{(L)}$  qui forment une base de l'espace de polarisation des particules de spin  $j$  bien déterminé. Nous pouvons généraliser la définition des matrices  $T_M^{(L)}$  de façon à construire une base de l'espace de polarisation des "particules" superposition de spins. Chaque matrice de cette base est caractérisée par quatre indices. Nous la notons

$$jj' T_M^{(L)} \tag{16}$$

Les indices  $j$  et  $j'$  peuvent prendre toutes les valeurs de l'ensemble des  $J_i$ , et pour  $j$  et  $j'$  fixés, les indices  $L$  et  $M$  prennent les valeurs entières :

$$|j-j'| \leq L \leq j+j' \quad , \quad M = -L, \dots, +L \tag{17}$$

Les matrices  $jj' T_M^{(L)}$  sont des matrices carrées  $n_S \times n_S$  dont les éléments sont définis par :

$$jj' T_M^{(L)} \begin{matrix} \hat{j},m \\ \hat{j}',m' \end{matrix} = \left[ (2j+1)(2j'+1) \right]^{1/4} \begin{pmatrix} m & L & \hat{j}' \\ \hat{j} & M & m' \end{pmatrix} \delta_{\hat{j}\hat{j}} \delta_{j'j'} \tag{18}$$

Les lignes sont caractérisées par les indices  $\hat{j}, m$ , les colonnes sont caractérisées par les indices  $\hat{j}', m'$ . Pour  $\hat{j}$  et  $\hat{j}'$  fixés, en faisant varier  $m$  et  $m'$  on parcourt une sous-matrice de dimensions  $(2\hat{j}+1) \times (2\hat{j}'+1)$ . Nous appelons cette sous-matrice le bloc  $(\hat{j}, \hat{j}')$ . Les blocs carrés  $(\hat{j}, \hat{j})$  sont appelés blocs diagonaux. On remarque sur la définition (18) que la matrice  $jj' T_M^{(L)}$  ne peut avoir d'éléments non nuls que dans le bloc  $(\hat{j} = j, \hat{j}' = j')$ .

Les propriétés des matrices  $jj'_T \begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}$  se déduisent des propriétés des symboles  $-3j$  :

- i) les matrices  $jj'_T \begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}$  sont réelles,
- ii) les matrices  $jj'_T \begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}$  satisfont la relation

$$jj'_T \begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}^* = (-)^{j-j'+M} j'j_T \begin{smallmatrix} (L) \\ -M \end{smallmatrix} \quad (19)$$

(noter la place des indices  $j, j'$  dans les deux matrices).

- iii) Tous les éléments de la matrice  $jj_T \begin{smallmatrix} (0) \\ 0 \end{smallmatrix}$  sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale du bloc  $(j, j)$  qui sont égaux à 1.

On a :

$$\sum_j jj_T \begin{smallmatrix} (0) \\ 0 \end{smallmatrix} = \mathbb{1} \quad (20)$$

- iv) Les  $n_S^2$  matrices  $jj'_T \begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}$  forment une base orthogonale au sens du produit scalaire :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr} (A^* B) \quad (21)$$

On a :

$$\langle jj'_T \begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}, \tilde{j}\tilde{j}'_T \begin{smallmatrix} (L') \\ M' \end{smallmatrix} \rangle = \frac{\sqrt{(2j+1)(2j'+1)}}{2L+1} \delta_{j\tilde{j}} \delta_{j'\tilde{j}'} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (22)$$

- v) En utilisant le tenseur  $C_L^{MM'}$  de l'espace  $\mathcal{K}_{2L+1}$  (voir I.A1) on peut définir les matrices  $jj'_T \begin{smallmatrix} M \\ (L) \end{smallmatrix}$  :

$$jj'_T \begin{smallmatrix} M \\ (L) \end{smallmatrix} = C_L^{MM'} \left( jj'_T \begin{smallmatrix} (L) \\ M' \end{smallmatrix} \right) = (-)^{L-M} \left( jj'_T \begin{smallmatrix} (L) \\ -M \end{smallmatrix} \right) \quad (23)$$

et en utilisant (19) on a :

$$jj'_T \begin{smallmatrix} M \\ (L) \end{smallmatrix} = (-)^{j-j'+L} \left( j'j_T \begin{smallmatrix} (L) \\ -M \end{smallmatrix} \right)^* \quad (24)$$

- vi) Pour une superposition de spins  $J_i$ , donnée, on définit la matrice  $n_S \times n_S$ ,  $\mathcal{D}^{(j)}(R)$  dont les éléments sont

$$\mathcal{D}^{(j)}(R)_{\hat{j}'m'}^{\hat{j}m} = D^{(j)}(R)_{m'}^m \delta_{\hat{j}j} \delta_{\hat{j}'j'} \quad (25)$$

c'est-à-dire que les éléments de la matrice  $\mathcal{D}^{(j)}(R)$  sont nuls sauf ceux du bloc diagonal ( $\hat{j}=j, \hat{j}'=j$ ) dont les éléments sont ceux de la matrice de rotation  $D^{(j)}(R)$ .

On peut faire agir le groupe des rotations sur les matrices  $jj'_T{}^{(L)}_M$  de la façon suivante :

$$jj'_T{}^{(L)}_M \xrightarrow{\text{rotation}} jj'_T{}^{(L)}_M = \mathcal{D}^{(j)}(R) jj'_T{}^{(L)}_M \mathcal{D}^{(j')}(R)^{-1} \quad (26)$$

En utilisant la définition (25) et la formule de réduction du produit tensoriel des représentations du groupe des rotations (I A1-21) on obtient :

$$jj'_T{}^{(L)}_M = jj'_T{}^{(L)}_{M'} D^{(L)}(R)^{M'}_M, \quad (27)$$

$$jj'_T{}^{(L)*}_M = \sum_{M'} D^{(L)}(R^{-1})^{M'}_M jj'_T{}^{(L)*}_{M'}, \quad (28)$$

c'est-à-dire que les  $jj'_T{}^{(L)}_M$  se transforment comme les composantes d'un opérateur tensoriel irréductible.

La Table I donne la représentation explicite des matrices  $jj'_T{}^{(L)}_M$  pour la superposition de spins  $\{1, 0\}$ .

## 2.2. Les paramètres multipolaires $jj'_t{}^{(L)}_M$ .

On peut développer la matrice densité  $\rho^{\hat{j}m}_{\hat{j}'m'}$  sur la base des matrices  $jj'_T{}^{(L)*}_M$  que nous venons de définir. Les coefficients du développement sont les paramètres multipolaires

$$\rho^{\hat{j}m}_{\hat{j}'m'} = \sum_{j, j'} \sum_{L=|j-j'|}^{j+j'} \frac{2L+1}{\sqrt{(2j+1)(2j'+1)}} \sum_{M=-L}^{+L} \left( jj'_T{}^{(L)*}_M \right)^{\hat{j}m}_{\hat{j}'m'} jj'_t{}^{(L)}_M \quad (29)$$

En utilisant la relation d'orthogonalité (22) et la définition (21) on peut inverser cette expression; on obtient :

$$jj'_t{}^{(L)}_M = \text{Tr} \left( jj'_T{}^{(L)}_M \rho \right) = \langle jj'_T{}^{(L)*}_M, \rho \rangle \quad (30)$$

c'est-à-dire :

$$jj'_t{}^{(L)}_M = \left[ (2j+1)(2j'+1) \right]^{1/4} \sum_{\hat{j}, \hat{j}'} \begin{pmatrix} m & L & j' \\ j & M & m' \end{pmatrix} \rho^{\hat{j}m}_{\hat{j}'m'} \delta_{\hat{j}\hat{j}} \delta_{\hat{j}'\hat{j}'}$$

ou

$$jj'_t{}^{(L)}_M = \left[ (2j+1)(2j'+1) \right]^{1/4} \begin{pmatrix} m & L & j' \\ j & M & m' \end{pmatrix} \rho^{j'm'}_{jm} \quad (31)$$

sans sommation sur  $j$  et  $j'$  dans le membre de droite.

Les propriétés des paramètres  $jj'_t{}^{(L)}_M$  se déduisent de celles de la matrice densité  $\rho$  et des matrices  $jj'_T{}^{(L)}_M$ .

i) l'hermiticité de  $\rho$  ( $\rho^* = \rho$ ) et la propriété (19) entraînent

$$\overline{jj'_t{}^{(L)}_M} = (-)^{j-j'+M} jj'_t{}^{(L)}_{-M} \quad (32)$$

(noter la place des indices  $j, j'$  dans les deux membres).

ii) d'après la propriété iii) des matrices  $jj'_T{}^{(L)}_M$  la quantité  $jj'_t{}^{(0)}_0$  est la trace du bloc diagonal  $\rho(\hat{j}=j, \hat{j}'=j)$  de la matrice  $\rho$

$$jj'_t{}^{(0)}_0 = \text{Tr } \rho(j, j) \quad (33)$$

et d'après (20) :

$$\sum_j jj'_t{}^{(0)}_0 = \sum_{\hat{j}, m} \rho^{\hat{j}m} \hat{j}_m = \text{Tr } \rho \quad (33')$$

iii) la quantité  $\text{Tr } \rho^2$  s'exprime facilement en fonction des paramètres multipolaires. En utilisant (29) et (22) on obtient :

$$\text{Tr } \rho^2 = \sum_{j, j'} \sum_{L=|j-j'|}^{j+j'} \frac{2L+1}{\sqrt{(2j+1)(2j'+1)}} \sum_{M=-L}^{+L} \left| jj'_t{}^{(L)}_M \right|^2 \quad (34)$$

iv) le groupe des rotations agit sur la matrice densité  $\rho$  de la superposition de la manière suivante :

$$\rho \xrightarrow{R} \rho' = \left( \sum_j \mathcal{D}^{(j)}(R) \right) \rho \left( \sum_{j'} \mathcal{D}^{(j')}(R^{-1}) \right) \quad (35)$$

où les matrices  $\mathcal{D}^{(j)}(R)$  sont définies par (25). En utilisant l'équation (28) et le développement (29) de la matrice densité, on montre que les paramètres

$jj'_t{}^{(L)}_M$  de la matrice  $\rho'$  sont reliés aux paramètres  $jj'_t{}^{(L)}_M$  de la matrice  $\rho$  par

$$jj'_t{}^{(L)}_{M'} = jj'_t{}^{(L)}_M D^{(L)}(R^{-1})_{M'}^M \quad (36)$$

v) la matrice densité peut être décomposée en multipôles. On définit les multipôles  $jj'_{\rho}^{(L)}$  par la relation :

$$f_{j\rho}^{(L)} = jj'_{\rho}^{(L)} = \frac{2L+1}{\sqrt{(2j+1)(2j'+1)}} \sum_{M=-L}^{+L} \left[ jj'_{T_M}^{(L)} \quad jj'_{t_M}^{(L)} + j'j_{T_M}^{(L)*} \quad j'j_{t_M}^{(L)} \right] \quad (37)$$

On note  $jj'_{\rho}$  la somme des multipôles pour  $j$  et  $j'$  fixés :

$$jj'_{\rho} = \sum_{L=|j-j'|}^{j+j'} jj'_{\rho}^{(L)} \quad (38)$$

et en portant (37) et (38) dans (29), on a la décomposition de  $\rho$  en multipôles

$$\rho = \sum_{j \leq j'} jj'_{\rho} = \sum_{j \leq j'} \sum_{L=|j-j'|}^{j+j'} jj'_{\rho}^{(L)} \quad (39)$$

### 2.3. Conditions de B-symétrie sur les paramètres $jj'_{t_M}^{(L)}$ .

Les conditions de B-symétrie (7) et (10) s'écrivent facilement sur les paramètres multipolaires.

En utilisant la définition (31) et en remarquant que  $m-m' = M$ , la condition (7) de B-symétrie en transversité s'écrit :

$$\boxed{jj'_{t_M}^{(L)} = \eta_j \eta_{j'} (-)^M jj'_{t_M}^{(L)}} \quad (40)$$

(transversité)

c'est-à-dire que l'on a

$$\eta_j \eta_{j'} (-)^M = -1 \Rightarrow jj'_{t_M}^{(L)} = 0 \quad (41)$$

D'autre part, en utilisant l'identité

$$\begin{pmatrix} m & L & j' \\ j & M & m' \end{pmatrix} = (-)^{-j+j'+L} \begin{pmatrix} -m & L & j' \\ j & -M & -m' \end{pmatrix} \quad (42)$$

la condition (10) de B-symétrie en hélicité s'écrit :

$$\boxed{jj'_{t_M}^{(L)} = \eta_j \eta_{j'} (-)^{L-M} jj'_{t_{-M}}^{(L)}} \quad (43)$$

(hélicité)

2.4. Exemple : paramètres multipolaires de la superposition  $\{1^-, 0^+\}$  .

La matrice densité est une matrice  $4 \times 4$ . Elle peut être décomposée en quatre blocs  $(0,0)$  ,  $(1,1)$  ,  $(0,1)$  ,  $(1,0)$  :

$$\rho = \begin{array}{|c|c|} \hline 0,0 & 0,1 \\ \hline 1,0 & 1,1 \\ \hline \end{array} \quad (44)$$

Les paramètres multipolaires des différents blocs sont donnés dans le tableau ci-dessous :

0,0		$00_t(0)$ 0				(45)	
1,1		$11_t(0)$ 0	$11_t(1)$ 0	$11_t(1)$ 1			
	$11_t(1)$ -1	$11_t(2)$ -2	$11_t(2)$ -1	$11_t(2)$ 0	$11_t(2)$ 1		$11_t(2)$ 2
0,1		$01_t(1)$ -1	$01_t(1)$ 0	$01_t(1)$ 1			
1,0		$10_t(1)$ -1	$10_t(1)$ 0	$10_t(1)$ 1			

Il faut remarquer que, à cause de l'hermiticité de  $\rho$ , tous les paramètres de ce tableau ne sont pas indépendants. On peut choisir comme paramètres indépendants ceux qui se trouvent à droite de la double ligne  $\parallel$  .

La symétrie de Bohr impose des conditions sur ces paramètres. Si on quantifie selon la normale au plan de la réaction (transversité) en utilisant (40) on montre que par la superposition  $\{1^-, 0^+\}$  , les seuls paramètres indépendants

non nuls sont les dix paramètres réels :

$$\left\{ \begin{array}{l} 00_{t_0}(0) \\ 11_{t_0}(0), 11_{t_0}(1), 11_{t_0}(2), \operatorname{Re} 11_{t_2}(2), \operatorname{Im} 11_{t_2}(2) \end{array} \right. \quad (46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} 01_{t_1}(1), \operatorname{Im} 01_{t_1}(1) \\ \operatorname{Re} 10_{t_1}(1), \operatorname{Im} 10_{t_1}(1) \end{array} \right. \quad (47)$$

Si on quantifie selon une direction du plan de la réaction (hélicité) en utilisant (43) on montre que les dix paramètres réels non nuls sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} 00_{t_0}(0) \\ 11_{t_0}(0), 11_{t_0}(2), \operatorname{Im} 11_{t_1}(1), \operatorname{Im} 11_{t_1}(2), \operatorname{Re} 11_{t_2}(2) \end{array} \right. \quad (48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} 01_{t_0}(1), \operatorname{Im} 01_{t_0}(1), \operatorname{Im} 01_{t_1}(1) \\ \operatorname{Im} 10_{t_1}(1) \end{array} \right. \quad (49)$$

3. Distribution angulaire de désintégration en deux corps d'une superposition de spins.

3.1. Forme générale de la distribution angulaire.

Considérons la distribution angulaire de désintégration en deux corps d'une "particule" superposition de  $\mathcal{N}_S$  spins  $\{S\}$  dont la polarisation est décrite par une matrice densité  $n_S \times n_S$ ,  $\rho$ . L'espace de phases de l'état final est paramétré par deux angles  $(\theta, \varphi)$ . La distribution angulaire  $I(\theta, \varphi)$  est obtenue en fonction de la matrice de désintégration  $O(\theta, \varphi)$  par la formule générale (voir I.4) :

$$I(\theta, \varphi) = \text{Tr}_i \text{Tr}_f [O(\theta, \varphi) \rho] \quad (50)$$

Nous avons vu que la matrice densité  $\rho$  est une somme de matrices  $^{jj'}\rho$ . La distribution angulaire étant une fonction linéaire de  $\rho$  on peut la décomposer en une somme :

$$I(\theta, \varphi) = \sum_{j \leq j'} ^{jj'} I(\theta, \varphi) \quad (51)$$

avec

$$^{jj'} I(\theta, \varphi) = \text{Tr}_i \text{Tr}_f [O(\theta, \varphi) ^{jj'} \rho] = ^{j'j} I(\theta, \varphi) \quad (52)$$

Le terme  $^{jj'} I(\theta, \varphi)$  est la contribution à la distribution angulaire des blocs hermitiques conjugués l'un de l'autre ( $j = j'$ ,  $j' = j$ ) et ( $j = j$ ,  $j' = j'$ ) de la matrice densité de superposition.

Par un raisonnement tout à fait semblable à celui du § 3 du chapitre I.2, on montre que le terme  $^{jj'} I(\theta, \varphi)$  peut s'écrire en fonction des paramètres multipolaires  $^{jj'} t_M^{(L)}$  sous la forme, analogue à I.4.(33) :

$$^{jj'} I(\theta, \varphi) = \sum_{L=|j-j'|}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \left[ ^{jj'} C(L) \overline{^{jj'} t_M^{(L)}} + ^{j'j} C(L) \overline{^{j'j} t_M^{(L)}} \right] Y_M^{(L)}(\theta, \varphi) \quad (53)$$

où les coefficients  $^{jj'} C(L)$  dépendent de la dynamique de la désintégration et du spin des particules finales. La distribution angulaire est une fonction réelle. En utilisant la relation

$$\overline{Y_M^{(L)}} = (-)^M Y_M^{(L)} \quad (54)$$

et la relation (32) on obtient la condition sur les coefficients  $^{jj'} C(L)$  :

$$\overline{j j'}_{C(L)} = (-)^{j-j'} j' j_{C(L)} \quad (55)$$

(noter la place des indices  $j, j'$  dans les deux membres).

### 3.2. Normalisation de la distribution angulaire.

Le bloc diagonal  $\rho(j, j)$  de la matrice  $\rho$  est la matrice densité de l'état de spin  $j$  qui apparaît dans la superposition  $\{S\}$ . Si on normalise la trace de la matrice densité  $\rho$  à l'unité, la trace du bloc  $\rho(j, j)$  représente la proportion de l'état de spin  $j$  dans la superposition. Si on considère un nombre  $N$  de particules et si on note  $N_j$  le nombre (mesurable ou non) d'états de spin  $j$ , on a, en utilisant (33)

$$\text{Tr} \rho(j, j) = j j_t(0) = \frac{N_j}{N} \quad (56)$$

Le terme  $j j_I(\theta, \varphi)$  est la contribution à la distribution angulaire de la désintégration de l'état de spin  $j$ . Elle doit être normalisée à  $\frac{N_j}{N}$ , c'est-à-dire :

$$\int j j_I(\theta, \varphi) d(\cos \theta) d\varphi = \frac{N_j}{N} \quad (57)$$

En utilisant la relation

$$\int Y_M^{(L)}(\theta, \varphi) d(\cos \theta) d\varphi = \sqrt{4\pi} \delta_{L0} \delta_{M0} \quad (58)$$

et la forme générale (53) de la distribution angulaire on obtient la normalisation des coefficients  $j j' C(0)$  :

$$j j' C(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{j j'} \quad (59)$$

et la distribution angulaire peut être écrite :

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{j, j'} \sum_{\substack{L=|j-j'| \\ \neq 0}}^{j+j'} j j' C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{j j'_t(L)}_M Y_M^{(L)}(\theta, \varphi) \quad (60)$$

### 3.3. Conservation de la parité dans la désintégration.

Dans l'étude de la désintégration en deux corps d'une particule de spin déterminé nous avons montré que la conservation de la parité entraîne que les

coefficients  $C(L)$  sont identiquement nuls pour  $L$  impair, (voir I. 4. (36) ).  
 Supposons que l'état de la "particule" superposition qui se désintègre soit  
 $B$ -symétrique, c'est-à-dire, si on quantifie en transversité, que les paramètres  
 multipolaires  $jj'_t \begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}$  satisfont la condition (40). Si la désintégration conserve  
 la parité, l'état final doit être lui aussi  $B$ -symétrique, c'est-à-dire que la  
 distribution angulaire doit être invariante pour l'opération :

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \pi - \theta \\ \varphi &\rightarrow \varphi \end{aligned} \quad I(\theta, \varphi) = I(\pi - \theta, \varphi) \quad (61)$$

Or on a la relation :

$$Y_{\begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}}(\pi - \theta, \varphi) = (-)^{L+M} Y_{\begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}}(\theta, \varphi) \quad (62)$$

En portant (40) et (62) dans la forme générale (60) de la distribution angulaire,  
 on voit que la conservation de la parité dans la désintégration impose

$$jj' C(L) \equiv 0 \quad \text{si} \quad \eta_j \eta_{j'} (-)^L = -1$$

(63)

Il faut remarquer que même s'il y a conservation de la parité à la désintégration,  
 lorsque des états de parité différente contribuent à la superposition, toutes les  
 valeurs de  $L$  apparaissent dans la distribution angulaire. On ne peut donc pas  
 tester la conservation de la parité dans la désintégration.

### 3. 4. Les moments de la distribution angulaire.

La distribution angulaire de désintégration dépend des paramètres  
 multipolaires  $jj'_t \begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}$  et des coefficients dynamiques  $jj' C(L)$ . Si ces coefficients  
 sont connus, on peut obtenir de l'information sur les paramètres multipolaires  
 en utilisant la méthode des moments. (Voir § 3. 3, chapitre I. 4). Les moments  
 de la distribution angulaire sont définis par la relation :

$$\langle Y_{\begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}} \rangle = \int I(\theta, \varphi) Y_{\begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}}(\theta, \varphi) d(\cos \theta) d\varphi \quad (64)$$

En utilisant la relation d'orthogonalité des harmoniques sphériques :

$$\int Y_{\begin{smallmatrix} (L) \\ M \end{smallmatrix}}(\theta, \varphi) Y_{\begin{smallmatrix} (L') \\ M' \end{smallmatrix}}(\theta, \varphi) d(\cos \theta) d\varphi = \delta_{LL'} \delta_{MM'} \quad (65)$$

les moments de la distribution angulaire théorique (60) sont :

$$\langle Y_{M}^{L} \rangle = \sum_{j, j'} \overline{j j'} C(L) j j'_{t M}^{(L)} \quad (66)$$

La mesure des moments ne permet donc de déterminer que la valeur de certaines combinaisons linéaires des paramètres multipolaires, les coefficients de ces combinaisons linéaires dépendant de la dynamique de la désintégration. Le plus souvent les coefficients  $\overline{j j'} C(L)$  ne sont pas complètement connus, la mesure de la distribution angulaire ne permet donc pas d'obtenir une information très complète sur la matrice densité de la superposition.

4. Les coefficients  $^{jj'} C(L)$  pour la désintégration  $\{S\} \rightarrow j_1^{\eta_1} + 0^{\eta_2}$ .

Dans ce paragraphe nous calculons les coefficients dynamiques de la désintégration d'une "particule" superposition de  $\mathcal{N}$  spins  $J_i$  ( $i=1, \dots, \mathcal{N}$ ) se désintégrant en deux particules, l'une de spin-parité  $j_1^{\eta_1}$  l'autre de spin-parité  $0^{\eta_2}$ . Nous suivons point par point la méthode qui a été utilisée dans le chapitre I.4 § 4 pour les particules de spin déterminé.

4.1. Amplitude de transition pour la désintégration  $\{S\} \rightarrow j_1 + 0$ .

Si on note respectivement  $\underline{p}$ ,  $\underline{p}_1$  et  $\underline{p}_2$  les impulsions de particules initiale et finales, l'amplitude de transition dépend du spin  $j$  de l'état qui se désintègre. L'élément de matrice de l'amplitude s'écrit :

$$T(\theta, \varphi)_{jm}^{m_1} = (\langle \underline{p}_2 | \otimes \langle \underline{p}_1 | j_1 m_1 | ) T | \{ \underline{p} \} jm \rangle \quad (67)$$

En étudiant les propriétés de transformation de cette amplitude pour les transformations du groupe de Poincaré, on montre que l'on peut écrire cette amplitude sous la forme

$$T(\theta, \varphi)_{jm}^{m_1} = D^{j_1}([\underline{p}_1]^{-1} \Lambda_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_1} [\underline{p}])_{n_1}^{m_1} T'(\theta, \varphi)_{jm}^{n_1} \quad (68a)$$

$$T'(\theta, \varphi)_{jm}^{n_1} = \sum_{\ell} \begin{pmatrix} j & \mu & n_1 \\ m & \ell & j_1 \end{pmatrix} j_A^{(\ell)} Y_{\mu}^{(\ell)}(\theta, \varphi) \quad (68b)$$

Ces relations sont tout à fait identiques aux relations I.4-(45) à ceci près que les amplitudes invariantes  $j_A^{(\ell)}$  dépendent de  $\ell$  et du spin  $j$  de l'état qui se désintègre.

4.2. Matrice de désintégration.

La distribution angulaire de désintégration  $I(\theta, \varphi)$  se calcule à partir de la matrice de transition  $T(\theta, \varphi)_{jm}^{m_1}$  et de la matrice densité  $\rho_{j'm'}^{jm}$  par une méthode tout à fait analogue à celle que nous avons développée dans le chapitre 4,

c'est-à-dire en introduisant la matrice de désintégration  $O(\omega)$ .

On obtient un ensemble de formules correspondant aux relations I.4-(47) :

$$I(\theta, \varphi) = \text{Tr}_i \text{Tr}_f [\tilde{O}(\theta, \varphi) \rho] \quad (69a)$$

$$\tilde{O}(\theta, \varphi) = O(\theta, \varphi)/D \quad (69b)$$

$$O(\theta, \varphi) = T(\theta, \varphi)^* \otimes T(\theta, \varphi) \quad (69c)$$

$$D = \sum_i (2J_i + 1)^{-1} \int_{\Omega} \text{Tr}_i \text{Tr}_f O(\omega) d\omega \quad (69d)$$

la seule différence entre ces relations et la relation I.4-(47) se trouve dans le fait que  $\text{Tr}_i$  signifie que l'on prend la trace sur tout l'espace à  $n_S = \sum_i (2J_i + 1)$  dimensions de l'état initial.

En suivant les étapes de calcul de l'appendice I A5 on montre que, en utilisant la forme (68) de l'amplitude on a

$$\text{Tr}_f \tilde{O}(\theta, \varphi) = \sum_{j, j'} \sum_{L=|j-j'|}^{j+j'} jj' C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \left( jj' T_M^{(L)} \right)^* Y_M^{(L)}(\theta, \varphi) \quad (70)$$

où les matrices  $jj' T_M^{(L)}$  sont les matrices que nous avons définies précédemment et où les coefficients  $jj' C(L)$  qui contiennent toute la dynamique de la désintégration ont pour expression :

$$jj' C(L) = (-)^{j+j_1} \left[ (2j+1)(2j'+1) \right]^{-1/4} \left[ \sum_i (2J_i+1) \right]^{-1} \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}$$

$$\times \sum_{\ell, \ell'} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \begin{Bmatrix} \ell & \ell' & L \\ j' & j & j_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} j_A(\ell) \overline{j_A(\ell')} \left[ \sum_{\tilde{j}, \tilde{\ell}} |j_A(\tilde{\ell})|^2 \right]^{-1} \quad (71)$$

Si on introduit les amplitudes réduites  $j_a^{(\ell)}$  définies par :

$$j_a^{(\ell)} = (2j+1)^{-1/2} \left[ \sum_i (2J_i+1) \right]^{-1/2} j_A(\ell) \left[ \sum_{\tilde{j}, \tilde{\ell}} |j_A(\tilde{\ell})|^2 \right]^{-1/2} \quad (72)$$

le coefficient  $jj' C(L)$  s'écrit :

$$jj' C(L) = (-)^{j+j_1} \frac{[(2j+1)(2j'+1)]^{1/4}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{2L+1} \sum_{\ell, \ell'} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}} \begin{Bmatrix} \ell & \ell' & L \\ j' & j & j_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} j_a^{(\ell)} \overline{j_a^{(\ell')}} \quad (73)$$

4.3. La distribution angulaire.

En portant (70) dans (69a) et en utilisant le développement multipolaire de la matrice densité (29) et la relation d'orthogonalité des matrices  $jj' T_M^{(L)}$  (22), on obtient la distribution angulaire sous la forme

$$I(\theta, \varphi) = \sum_{j, j'} \sum_{L=|j-j'|}^{j+j'} jj' C(L) \sum_{M=-L}^{+L} \overline{jj' T_M^{(L)}} Y_M^{(L)}(\theta, \varphi) \quad (74)$$

où les coefficients  $jj' C(L)$  sont donnés par (73). L'expression (74) est identique à celle que nous avons étudiée dans le § 3, les coefficients  $jj' C(0)$  sont donc normalisés à  $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \delta_{jj'}$ . Cette normalisation permet de fixer certaines conditions sur les amplitudes  $j_a^{(\ell)}$ . En effet de (73) on tire

$$jj' C(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\ell} |j_a^{(\ell)}|^2 \delta_{jj'} \quad (75)$$

d'où la condition

$$\sum_{\ell} |j_a^{(\ell)}|^2 = 1 \quad (76)$$

On remarque sur l'expression (73) que, à cause du symbole  $-3j$ , le coefficient  $jj' C(L)$  est nul si  $(-)^{\ell+\ell'+L} = -1$ . Ce résultat est équivalent à la condition (63) de conservation de la parité à la désintégration. En effet, par conservation de la parité on a

$$\eta_j \eta_{j_1} \eta_{j_2} = (-)^{\ell} \quad , \quad \eta_{j'} \eta_{j_1} \eta_{j_2} = (-)^{\ell'} \quad (77)$$

d'où

$$(-)^{\ell+\ell'+L} = \eta_j \eta_{j'} (-)^L \quad (78)$$

5. Calcul des coefficients  $^{jj'}C(L)$  pour certaines désintégrations.

Les coefficients  $^{jj'}C(L)$  dépendent de la dynamique de la désintégration par l'intermédiaire des amplitudes invariantes réduites  $^j a^{(\ell)}$ . Pour l'état de spin  $j$  le nombre d'amplitudes est  $2g+1$  où  $g$  est le minimum de  $j$  et  $j_1$ . Si la désintégration conserve la parité, ce nombre est réduit. Il est intéressant d'étudier les cas où ce nombre se réduit à 1, car alors on peut donner aux coefficients  $^{jj'}C(L)$  une forme relativement simple. En effet, si pour chaque état de spin  $j$  de la superposition la valeur de  $\ell$  est fixée on a une seule amplitude  $^j a^{(\ell)}$  que l'on note  $^j a$ , d'après la condition (76) cette amplitude est de module unité, et on peut écrire

$$^j a^{(\ell)} \equiv ^j a = e^{i\varphi_j} \quad (79)$$

Le coefficient  $^{jj'}C(L)$  peut s'écrire :

$$^{jj'}C(L) = \underline{^{jj'}C(L)} e^{i(\varphi_j - \varphi_{j'})} \quad (80)$$

avec

$$\sqrt{4\pi} \underline{^{jj'}C(L)} = (-)^{j+j_1} [(2j+1)(2j'+1)]^{1/4} \sqrt{2L+1} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \begin{Bmatrix} \ell & \ell' & L \\ j' & j & j_1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (81)$$

Les coefficients  $\underline{^{jj'}C(L)}$  ne dépendent pas de la dynamique de la désintégration. La distribution angulaire peut être mise sous la forme :

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{j, j'} \sum_{\substack{L=|j-j'| \\ \neq 0}}^{j+j'} \underline{^{jj'}C(L)} \sum_{M=-L}^{+L} \underline{^{jj'}t_M^{(L)}} Y_M^{(L)}(\theta, \varphi) \quad (82)$$

où les paramètres multipolaires  $\underline{^{jj'}t_M^{(L)}}$  définis par :

$$\underline{^{jj'}t_M^{(L)}} = e^{i\varphi_j} \underline{^{jj'}t_M^{(L)}} e^{-i\varphi_{j'}} \quad (83)$$

sont les paramètres multipolaires de la matrice  $\underline{\rho}$  dont les éléments sont :

$$\underline{\rho}_{j'm'}^{jm} = e^{i\varphi_j} \rho_{j'm'}^{jm} e^{-i\varphi_{j'}} \quad (84)$$

Cette matrice  $\underline{\rho}$  a toutes les propriétés de la matrice densité  $\rho$ , elle est

hermitique, sa trace est 1 et elle est définie positive. Les éléments des blocs diagonaux de la matrice  $\underline{\rho}$  sont identiques à ceux de la matrice  $\rho$ , mais les éléments des blocs d'interférence sont multipliés par une phase. La mesure des moments de la distribution angulaire permet de déterminer les paramètres d'interférence de la matrice  $\underline{\rho}$ , pour calculer les paramètres d'interférence de  $\rho$  il faut connaître les phases relatives des amplitudes  $j_a$ .

5.1. La désintégration  $\{S\} \rightarrow O^{\eta_1} + O^{\eta_2}$ .

Si le spin  $j_1$  est nul, pour tout état  $j$ , seule l'amplitude  $\ell=j$  contribue et la formule (81) se simplifie considérablement. Le coefficient  $^{jj'}\underline{C}(L)$  a pour expression :

$$\sqrt{4\pi} \ ^{jj'}\underline{C}(L) = (-)^j [(2j+1)(2j'+1)]^{1/4} \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (85)$$

Les valeurs numériques du coefficient  $\sqrt{4\pi} \ ^{jj'}\underline{C}(L)$ , pour certaines combinaisons des spins  $j$  et  $j'$  sont données dans la table II.

5.2. La désintégration  $\{S\} \rightarrow \frac{1}{2}^{\eta_1} + O^{\eta_2}$  conservant la parité.

Pour tout état  $j$  la conservation du moment angulaire impose  $\ell = j \pm \frac{1}{2}$ . Si la parité est conservée dans la désintégration une seule des deux valeurs de  $\ell$  est possible, celle pour laquelle on a

$$(-)^{\ell} = \eta_j \eta_1 \eta_2 \quad (86)$$

En utilisant cette relation et l'identité

$$\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \begin{Bmatrix} \ell & \ell' & L \\ j' & j & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \left[ \frac{1+(-)^{\ell+\ell'+L}}{2} \right] \begin{pmatrix} L & j' & j \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (87)$$

le coefficient  $^{jj'}\underline{C}(L)$  s'écrit :

$$\sqrt{4\pi} \ ^{jj'}\underline{C}(L) = (-)^{j-\frac{1}{2}} [(2j+1)(2j'+1)]^{1/4} \sqrt{2L+1} \left[ \frac{1+\eta_j \eta_{j'} (-)^L}{2} \right] \begin{pmatrix} L & j' & j \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (88)$$

Les valeurs numériques du coefficient  $\sqrt{4\pi} \ ^{jj'}\underline{C}(L)$ , pour certaines combinaisons de  $j$  et  $j'$  sont données dans la table III.

6. Application à la superposition  $\{1^-, 0^+\}$ .

6.1. Distribution angulaire  $\{1^-, 0^+\} \rightarrow 0 + 0$ .

Comme application du formalisme qui a été développé dans les paragraphes précédents, nous considérons la superposition de deux spins,  $1^-, 0^+$ . Nous supposons que la "particule" superposition est produite dans une réaction forte, qu'elle se désintègre en deux particules de spin zéro. Nous notons  $\rho$  la matrice densité de la superposition et  $\underline{\rho}$  la matrice densité définie en (84). En utilisant la table II on peut calculer la distribution angulaire de désintégration en fonction des paramètres  ${}_{tM}^{jj'}(L)$  définis en (83) :

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \sum_{M=-1}^{+1} \left( \overline{{}_{tM}^{10}(1)} - \overline{{}_{tM}^{01}(1)} \right) Y_M^{(1)}(\theta, \varphi) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{M=-2}^{+2} \overline{{}_{tM}^{11}(2)} Y_M^{(2)}(\theta, \varphi) \quad (89)$$

Les moments de la distribution angulaire permettent de calculer certaines combinaisons linéaires des paramètres multipolaires :

$$\overline{{}_{tM}^{10}(1)} - \overline{{}_{tM}^{01}(1)} = \frac{\sqrt{4\pi}}{4\sqrt{3}} \langle Y_M^1 \rangle \quad (90a)$$

$$\overline{{}_{tM}^{11}(2)} = -\sqrt{2\pi} \langle Y_M^2 \rangle \quad (90b)$$

6.2. Matrice densité B-symétrique.

Si la superposition est produite dans une réaction qui conserve la parité, et si on quantifie selon la normale au plan de production, la matrice densité  $\rho$  et la matrice  $\underline{\rho}$  ont la structure générale en "damier" figurée en (13). Les paramètres multipolaires non nuls sont donnés en (46) et (47). Pour simplifier les notations on pose :

$$t = \overline{{}_{t0}^{00}(0)}, \quad T = \overline{{}_{t0}^{11}(0)}, \quad t + T = 1 \quad (91a)$$

$$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \overline{{}_{t0}^{11}(1)}, \quad Z = \sqrt{\frac{5}{2}} \overline{{}_{t0}^{11}(2)}, \quad X + iY = \sqrt{5} \overline{{}_{t2}^{11}(2)} \quad (91b)$$

$$(P - Q) + i(R - S) = \frac{4}{\sqrt{108}} \overline{{}_{t1}^{01}(1)} \quad (91c)$$

$$(P + Q) + i(R + S) = \frac{4}{\sqrt{108}} \overline{{}_{t-1}^{01}(1)} \quad (91d)$$

Avec ces notations, en utilisant la table I, la matrice densité s'écrit sous la forme :

$$\underline{\rho} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 - T & \frac{P+Q}{\sqrt{6}} - i \frac{R+S}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{P-Q}{\sqrt{6}} - i \frac{R-S}{\sqrt{6}} \\ \hline \frac{P+Q}{\sqrt{6}} + i \frac{R+S}{\sqrt{6}} & \frac{T+Z}{3} + \frac{F}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{X-iY}{\sqrt{3}} \\ \hline 0 & 0 & \frac{T-2Z}{3} & 0 \\ \hline \frac{P-Q}{\sqrt{6}} + i \frac{R-S}{\sqrt{6}} & \frac{X+iY}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{T+Z}{3} - \frac{F}{\sqrt{3}} \\ \hline \end{array} \quad (92)$$

Les paramètres que nous avons définis sont les composantes de la matrice  $\underline{\rho}$  par rapport à une base orthonormale. En effet, si on note  $\rho_0(T)$  la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $(1-T, \frac{T}{3}, \frac{T}{3}, \frac{T}{3})$  et si on définit le degré de polarisation par

$$(d_{\underline{\rho}})^2 = \frac{3}{2} \text{Tr}(\underline{\rho} - \rho_0(T))^2 \quad (93)$$

on a

$$(d_{\underline{\rho}})^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + F^2 + P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 \quad (94)$$

Nous avons défini  $d_{\underline{\rho}}$  de telle façon que  $d_{\underline{\rho}}$  soit égal à 1, si la superposition est dans un état pur de spin 1, c'est-à-dire si on a  $T = 1$  et  $\underline{\rho}^2 = \underline{\rho}$ .

### 6.3. Paramètres mesurables.

Nous avons vu que la mesure du nombre  $N_F$  d'évènements dans le fond et du nombre  $N_R$  d'évènements dans la bosse de la résonance, permet de déterminer les paramètres  $t$  et  $T$ . On a, d'après (56) :

$$t = \frac{N_F}{N} \quad , \quad T = \frac{N_R}{N} \quad , \quad t + T = 1 \quad (95)$$

Par ailleurs, d'après (89) et (90) la mesure des moments de la distribution

angulaire permet de déterminer les paramètres

$$Z, X, Y, Q, R \quad (96)$$

tandis que les paramètres

$$F, P, S \quad (97)$$

ne sont pas mesurables par l'étude de la distribution angulaire. Le paramètre  $F$  est le "fantôme" de la particule de spin 1, les paramètres  $P$  et  $S$  sont des "fantômes" de l'interférence  $\{1^-, 0^+\}$ .

#### 6.4. Domaine de positivité des paramètres mesurables.

Le problème consiste à déterminer quel est le domaine de variation pour les six paramètres mesurables  $T, Z, X, Y, Q, R$ . La matrice densité  $\underline{\rho}$  doit être définie positive. Le domaine de positivité est défini par les deux conditions suivantes (voir chapitre I. 2 (14) et II A2) :

a) il ne contient que des matrices  $\underline{\rho}$  telles que

$$\det \underline{\rho} \geq 0 \quad (98)$$

b) il est connexe avec la matrice non polarisée  $\rho_0(T)$ .

La condition (98) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{T-2Z}{3} \right) \left\{ (1-T) \left[ \left( \frac{T+Z}{3} \right)^2 - F^2 - X^2 - Y^2 \right] - \left( \frac{T+Z}{3} \right) (P^2 + Q^2 + R^2 + S^2) \right. \\ & \left. + \frac{2F}{\sqrt{3}} (PQ + RS) + \frac{X}{\sqrt{3}} (P^2 - S^2 - Q^2 + R^2) + \frac{2Y}{\sqrt{3}} (PS - QR) \right\} \geq 0 \end{aligned} \quad (99)$$

On observe que cette équation est invariante pour la transformation  $F \rightarrow -F$ ,  $P \rightarrow -P$ ,  $S \rightarrow -S$ . Donc le plan défini par  $F=0$ ,  $P=0$ ,  $S=0$  est un plan de symétrie du domaine de positivité. La projection sur ce plan et l'intersection par ce plan sont égales, et le domaine de positivité des paramètres mesurables est défini par :

$$(T-2Z) \left\{ (1-T) \left[ \left( \frac{T+Z}{3} \right)^2 - X^2 - Y^2 \right] - \left( \frac{T+Z}{3} \right) (Q^2 + R^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ X(Q^2 - R^2) + 2YQR \right] \right\} \geq 0 \quad (100)$$

Cette équation est invariante pour la transformation  $Q \rightarrow -Q$ ,  $R \rightarrow -R$ , donc, le domaine de positivité des paramètres  $T, X, Y, Z$  s'obtient en posant  $Q=0$ ,  $R=0$  :

$$(T-2Z)(1-T) \left[ \left( \frac{T+Z}{3} \right)^2 - X^2 - Y^2 \right] \geq 0 \quad (101)$$

Les éléments diagonaux de la matrice  $\underline{\rho}$  doivent être positifs, nous avons donc les conditions :

$$0 \leq T \leq 1 \quad , \quad T \geq 2Z \quad (102a)$$

$$\left( \frac{T+Z}{3} \right)^2 - X^2 - Y^2 \geq 0 \quad (102b)$$

Les conditions (102) définissent un tronc de cône à base circulaire dont le sommet a pour coordonnées  $X = Y = 0$ ,  $Z = -T$  et dont la base est dans le plan  $Z = \frac{T}{2}$ , voir Fig. 1 .

Si les paramètres  $X, Y, Z, T$  satisfont les conditions (102), les paramètres  $Q$  et  $R$  doivent satisfaire la condition (100) que l'on peut écrire sous la forme :

$$aQ^2 + bR^2 + 2cQR \leq (1-T)(ab-c^2) \quad (103)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} a &= (T+Z) + \sqrt{3} X \\ b &= (T+Z) - \sqrt{3} X \\ c &= \sqrt{3} Y \end{aligned} \quad (104)$$

L'équation (103) est l'équation de l'intérieur d'une ellipse, car on a :

$$\Delta \equiv c^2 - ab = - \left[ (T+Z)^2 - 3(X^2 + Y^2) \right] \leq 0 \quad (105)$$

Rapportée à ses axes principaux, l'équation de l'ellipse s'écrit :

$$\frac{Q'^2}{A^2} + \frac{R'^2}{B^2} = 1 \quad , \quad (106)$$

avec

$$\begin{aligned} A^2 &= (1-T) \left[ T+Z - \sqrt{3(X^2 + Y^2)} \right] , \\ B^2 &= (1-T) \left[ T+Z + \sqrt{3(X^2 + Y^2)} \right] , \end{aligned} \quad (107)$$

les axes  $Q'$  et  $R'$  étant obtenus à partir des axes  $Q$  et  $R$  par une rotation d'angle  $\varphi$  tel que

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{Y}{X} \quad . \quad (108)$$

On remarque que pour T et Z fixés, si X et Y varient, l'ellipse se déforme dans le plan Q, R mais son cercle de Monge de rayon r

$$r = (A^2 + B^2)^{1/2} = \left[ 2(T+Z)(1-T) \right]^{1/2} \quad (109)$$

reste constant.



Table II - Désintégration  $\{S\} \rightarrow 0 + 0$

a) distribution angulaire de désintégration :

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{j, j'} \sum_{L=|j-j'|}^{j+j'} \sum_{M=-L}^{+L} \underline{C}(L) e^{i\varphi_j} \overline{t_M^{(L)}} e^{-i\varphi_{j'}} Y_M^{(L)}(\theta, \varphi)$$

b) coefficient  $\underline{C}(L)$  :

$$\sqrt{4\pi} \underline{C}(L) = (-)^j \left[ (2j+1)(2j'+1) \right]^{\frac{1}{4}} \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} j & j' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Table du coefficient  $\sqrt{4\pi} \underline{C}(L)$   $\underline{C}(L) = (-)^{j-j'} j' j \underline{C}(L)$

j		0		1		2		3		
j'		0		1		2		3		4
L	1		$\frac{4}{3}$	0	$\sqrt{\frac{12}{5}}$	0	$\frac{4}{\sqrt{35}}$	0	0	0
	2		$-\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	0	$-\sqrt{\frac{10}{7}}$	$\frac{4}{\sqrt{7}}$	0	$-\sqrt{\frac{4}{3}}$	0
	3				$-\frac{4}{\sqrt{5}}$	0	$\sqrt{7}$	0	$\frac{4}{\sqrt{45}}$	0
	4					$\sqrt{\frac{18}{7}}$		$-\frac{4}{\sqrt{7}}$	0	$\sqrt{\frac{18}{11}}$
	5								$\frac{4}{\sqrt{63}}$	0
	6									$-\sqrt{\frac{100}{33}}$

Table III - Désintégration  $\{S\} \rightarrow \frac{1}{2} + 0$  avec conservation de la parité.

a) distribution angulaire de désintégration :

$$I(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} + \sum_{j, j'} \sum_{L=j-j'}^{j+j'} \frac{1+\eta_j \eta_{j'} (-)^L}{2} \underline{jj'}_{C(L)} \sum_{M=-L}^{+L} e^{i\varphi_j \frac{jj'}{t} \frac{(L)}{M}} e^{-i\varphi_{j'} Y_M^{(L)}(\theta, \varphi)}$$

b) coefficient  $\underline{jj'}_{C(L)}$  :

$$\sqrt{4\pi} \underline{jj'}_{C(L)} = (-)^{j-\frac{1}{2}} \left[ (2j+1)(2j'+1) \right]^{\frac{1}{4}} \sqrt{2L+1} \begin{pmatrix} L & j' & j \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Table du coefficient  $\sqrt{4\pi} \underline{jj'}_{C(L)}$

$$\underline{jj'}_{C(L)} = (-)^{j-j'} \underline{j'j}_{C(L)}$$

	j	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$			$\frac{7}{2}$				
	j'	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
L	1	1	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	<del>X</del>	$4\sqrt{\frac{54}{25}}$	$\sqrt{\frac{3}{35}}$	<del>X</del>	<del>X</del>	$4\sqrt{\frac{108}{49}}$	$\sqrt{\frac{1}{21}}$
2			$4\sqrt{2}$	-1	$4\sqrt{3}$	$4\sqrt{\frac{6}{49}}$	$-\sqrt{\frac{8}{7}}$	<del>X</del>	$4\sqrt{\frac{162}{49}}$	$4\sqrt{\frac{4}{147}}$	$-\sqrt{\frac{25}{21}}$
3				$-\sqrt{5}$	$4\sqrt{3}$	$-4\sqrt{\frac{24}{25}}$	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{2}$	$4\sqrt{\frac{2}{9}}$	$-4\sqrt{\frac{4}{3}}$	$-\sqrt{\frac{3}{11}}$
4						$-4\sqrt{\frac{216}{49}}$	$\sqrt{\frac{6}{7}}$	$\sqrt{2}$	$-4\sqrt{\frac{50}{49}}$	$-4\sqrt{\frac{2700}{5929}}$	$\sqrt{\frac{81}{77}}$
5							$\sqrt{\frac{50}{21}}$		$-4\sqrt{\frac{50}{9}}$	$4\sqrt{\frac{100}{147}}$	$\sqrt{\frac{75}{91}}$
6										$4\sqrt{\frac{2500}{363}}$	$-\sqrt{\frac{25}{33}}$
7											$-\sqrt{\frac{1225}{429}}$