

Chapitre 2 :

CORRELATIONS DE POLARISATION

0. Introduction.

Nous ne considérons ici, pour simplifier, que les corrélations de polarisation entre deux particules de spin j_1, j_2 . Pour des impulsions énergies fixées p_1, p_2 l'espace des polarisations est

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2j_1+1}(p_1) \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1}(p_2) \quad (1)$$

de dimension

$$n = (2j_1+1)(2j_2+1) = n_1 n_2 \quad (1')$$

L'opérateur densité de polarisation de l'état des deux particules est un opérateur $\rho \geq 0$ sur \mathcal{H} . On peut faire agir indépendamment sur les $\mathcal{H}_{2j_i+1}(p_i)$ les petits groupes des p_i ($i = 1, 2$). C'est la représentation $D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}$ du groupe $G = SU(2) \times SU(2)$ qui agit sur \mathcal{H} et c'est la représentation

$$(D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)}) \otimes (\bar{D}^{(j_1)} \otimes \bar{D}^{(j_2)}) = \bigoplus_{L_1=0}^{2j_1} \bigoplus_{L_2=0}^{2j_2} D^{(L_1)} \otimes D^{(L_2)} \quad (2)$$

de G qui agit sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. D'où la décomposition de ρ en bimultipôles (I.1 (60'))

$$\rho = \sum_{L_1=0}^{2j_1} \sum_{L_2=0}^{2j_2} \rho^{(L_1, L_2)} \quad (3)$$

avec
$$\rho^{(0,0)} = \frac{1}{n} I \quad (3')$$

I. Opérateurs hermitiques sur un produit tensoriel d'espaces.

Quittons un instant la physique, pour rappeler et étudier quelques propriétés simples des produits tensoriels de deux espaces d'Hilbert \mathcal{H}_i de dimension finie n_i ($i = 1, 2$) et de l'espace $\mathcal{X}(\mathcal{H}) = \mathcal{X}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ des opérateurs hermitiques sur $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Comme nous l'avons vu, I.1(41), $\mathcal{X}(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel réel de dimensions $n^2 = (n_1 n_2)^2$ qui a un produit

scalaire euclidien naturel :

$$(A,B) = \text{tr } AB . \quad (3'')$$

L'espace des opérateurs linéaires sur $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$ est lui-même un produit tensoriel.

$$\mathfrak{L}(\mathbb{H}) = \mathfrak{L}(\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2) = \mathfrak{L}(\mathbb{H}_1) \otimes \mathfrak{L}(\mathbb{H}_2) \quad (4)$$

On dit qu'un opérateur de $\mathfrak{L}(\mathbb{H})$ est décomposable s'il est de la forme $A_1 \otimes A_2$. Tous les opérateurs sur $\mathfrak{L}(\mathbb{H})$ sont une combinaison linéaire d'opérateurs décomposables. Nous rappelons les propriétés :

$$A_1 \otimes A_2' + A_1 \otimes A_2'' = A_1 \otimes (A_2' + A_2'') \quad (5)$$

$$(A_1' \otimes A_2') (A_1'' \otimes A_2'') = A_1' A_1'' \otimes A_2' A_2'' \quad (5^a)$$

$$(A_1 \otimes A_2)^* = A_1^* \otimes A_2^* \quad (5^b)$$

$$\text{tr}(A_1 \otimes A_2) = (\text{tr } A_1)(\text{tr } A_2) \quad (5^c)$$

$$\det(A_1 \otimes A_2) = (\det A_1)^{n_2} (\det A_2)^{n_1} \quad (5^d)$$

$$\text{rang}(A_1 \otimes A_2) = (\text{rang } A_1)(\text{rang } A_2) \quad (5^e)$$

En 5^c , nous utilisons la même notation tr pour l'opération trace dans différents espaces. En 5^d , $n_1 = \dim \mathbb{H}_1$.

Si \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont deux espaces euclidiens il y a des isomorphismes canoniques.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) & \xleftarrow{i_1} & \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \xrightarrow{i_2} \text{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \mathfrak{L}_R & \xleftarrow{\quad} & R \xrightarrow{\quad} \mathfrak{K}_R \end{array} \quad (6)$$

entre le produit tensoriel $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ et les espaces d'opérateurs linéaires (= homomorphismes d'espaces vectoriels) reliant \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 †. Dans le cas où $\mathcal{E}_1 = \mathfrak{K}(\mathbb{H}_1)$ est l'espace des opérateurs hermitiques sur \mathbb{H} , ces isomorphismes sont réalisés par les traces partielles tr_1 , tr_2 introduites en I chap. 3 ; (I.A3).

† Au tenseur décomposable $R = x_1 \otimes x_2$, on fait correspondre l'opérateur dyadique $i_2(R) = \mathfrak{K}_R = x_1(x_2 \in \text{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1))$ qui transforme tout vecteur $a_2 \in \mathcal{E}_2$ en $\mathfrak{K}_R a_2 = x_1(x_2, a_2) \in \mathcal{E}_1$ et l'opérateur $i_1(R) = \mathfrak{L}_R \in \text{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ qui transforme tout vecteur $a_1 \in \mathcal{E}_1$ en $\mathfrak{L}_R a_1 = (a_1, x_1)x_2 \in \mathcal{E}_2$. On étend la correspondance à tous les tenseurs R par linéarisation.

Soit $R = \sum_i A_i \otimes B_i \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ (7)

A tout $X \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1)$, correspond $l_R(X) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_2)$:

$$l_R(X) = \text{tr}_1 (X \otimes I) R = \sum_i (\text{tr } X A_i) B_i = \text{tr}_1 R(X \otimes I) \quad (8)$$

De même à tout $Y \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_2)$, correspond $k_R(Y) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1)$

$$k_R(Y) = \text{tr}_2 (I \otimes Y) R = \sum_i A_i \text{tr}(Y B_i) = \text{tr}_2 R(I \otimes Y). \quad (8')$$

Nous avons déjà noté que pour tout opérateur M de $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$

$$\text{tr } M = \text{tr}(\text{tr}_2 M) = \text{tr}(\text{tr}_1 M) \quad (9)$$

Lemme 1. Si $R \geq 0$, les applications $X \mapsto l_R(X) = \text{tr}_1 R(X \otimes I)$ et $Y \mapsto k_R(Y) = \text{tr}_2 R(I \otimes Y)$ transforment un opérateur positif en opérateur positif.

Soit $|e_i\rangle$ un ensemble de vecteurs propres orthonormés de $X \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1)$ et désignons par ξ_i les valeurs propres correspondantes :

$$X = \sum_i \xi_i |e_i\rangle \langle e_i| \quad (10)$$

$$R \geq 0 \Rightarrow \forall |e_i\rangle \in \mathcal{H}_1, \forall |a\rangle \in \mathcal{H}_2$$

$$(\langle e_i| \otimes \langle a|) R (|e_i\rangle \otimes |a\rangle) \geq 0$$

Les ξ_i étant positifs on a encore :

$$\sum_i \xi_i (\langle e_i| \otimes \langle a|) R (|e_i\rangle \otimes |a\rangle) = \langle a| (\text{tr}_1 (X \otimes I) R) |a\rangle = \text{tr } P_a (\text{tr}_1 (X \otimes I) R) \geq 0$$

où nous avons utilisé (10), L'inégalité

étant vrai pour $\forall |a\rangle \in \mathcal{H}_2$, implique la conclusion du lemme. La démonstration est identique pour tr_2 .

Lemme 2. Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

a) l'opérateur $R \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})$ est décomposable en un produit tensoriel

$$R = R_1 \otimes R_2$$

b) le rang de l'opérateur linéaire $l_R : \mathfrak{K}(\mathcal{H}_1) \xrightarrow{l_R} \mathfrak{K}(\mathcal{H}_2)$ est un

c) le rang de l'opérateur linéaire $k_R : \mathfrak{K}(\mathcal{H}_2) \xrightarrow{k_R} \mathfrak{K}(\mathcal{H}_1)$ est un

Les homomorphismes l_R, k_R sont explicités en (8) et (8'). Il est clair que $a \Rightarrow b$ et $a \Rightarrow c$. En effet, si $R = R_1 \otimes R_2$

$$l_R(X) = \text{tr}_1 R(X \otimes I) = R_2 \text{tr } R_1 X.$$

L'image par l de tout $Y \in \mathfrak{V}(\mathcal{H}_1)$ est proportionnelle à R_2 donc

$$\text{rang } \ell_R \equiv \dim \text{Image } \ell_R = 1$$

De même rang, $k_R = 1$. Réciproquement $b \Rightarrow a$. En effet rang $k_R = 1$ signifie que pour $\forall X \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$, $\ell_R(X) = \text{tr}_1(X \otimes 1) R = \lambda(X) R_2$ où R_2 est un opérateur fixe de $\mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ et $\lambda(X)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$ qui, par (3''), est de la forme $\text{tr } X R_1$ avec R_1 fixé, donc $R = R_1 \otimes R_2$. Pour $c \Rightarrow a$, changer 1 en 2.

2. Observation des corrélations de polarisation.

Soit ρ l'opérateur densité de polarisation de l'état des deux particules d'énergie impulsions données p_1, p_2 . Il agit sur l'espace (1)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2j_1+1}(p_1) \otimes \mathcal{H}_{2j_2+1}(p_2) \quad (11)$$

que nous noterons désormais $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Comme nous l'avons vu, $\text{tr } \rho = 1$, $\rho \geq 0$. Soit $1 \geq R_1 \geq 0$ l'opérateur hermitique qui correspond à l'observation de la particule 1 dans un état de polarisation donné \dagger . La probabilité $\pi_{1,2}$ des observations simultanées R_1 et R_2 pour l'état ρ est :

$$0 \leq \pi_{1,2} = \text{tr } \rho(R_1 \otimes R_2) \leq 1 \quad (12)$$

Plus généralement, si on fait sur la particule 1 l'observation R_1 , on peut décrire la polarisation de la particule 2 par l'opérateur que nous notons $\rho_2(R_1)$:

$$\rho_2(R_1) = \ell_\rho(R_1) = \text{tr}_1 \rho(R_1 \otimes I) \quad (13)$$

puisque toute observation ultérieure R_2 sur la particule 2 donne la probabilité

$$\pi_{1,2} = \text{tr } R_2(\text{tr}_1 \rho(R_1 \otimes I)) = \text{tr } \rho(R_1 \otimes R_2).$$

En particulier

$$\rho_1 = \text{tr}_2 \rho, \quad \rho_2 = \text{tr}_1 \rho \quad (14)$$

\dagger Par exemple R_1 est $\tilde{O}(\omega)$ la matrice de désintégration introduite en I.4 (27').

sont les opérateurs densité de polarisation de chaque particule lorsqu'on n'observe pas la polarisation de l'autre particule (ce qui correspond à $R_1 = I$ ou $R_2 = I$). Le lemme 1 nous assure que les matrices $\rho_2(R_1)$, $\rho_1(R_2)$, ρ_2, ρ_1 sont positives. De plus (5^c), (9), et $\text{tr } \rho = 1$ nous montrent que $\rho_1(R_2)$ et $\rho_2(R_1)$ n'ont pas en général leur trace normalisée à 1 (ce qui peut-être fait en divisant ces matrices par leur trace).

Si on fait séparément l'observation R_i sur la particule i on obtient donc la probabilité (ρ_i donné en 14).

$$\pi_i = \text{tr } \rho_i R_i$$

Si pour toute paire d'observations R_1, R_2

$$\pi_{12} - \pi_1 \pi_2 = \text{tr } (R_1 \otimes R_2)(\rho - \rho_1 \otimes \rho_2) = 0 \quad (15)$$

on dit qu'il n'y a pas de corrélations entre les polarisations et dans ce cas ρ est décomposable

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \quad (16).$$

Dans le cas général on appellera terme de corrélation de ρ , l'opérateur

$$K(1,2) = \rho - \rho_1 \otimes \rho_2 \quad (17)$$

Notons que si ρ décrit un état pur (c'est-à-dire $\text{rang } \rho = 1$) et s'il est décomposable ($K(1,2) = 0$), par (5^b) nous savons que ρ_1 et ρ_2 sont des états purs ; par contre s'il n'est pas décomposable ($K(1,2) \neq 0$), ρ_1 et ρ_2 ne sont pas des états purs, comme le montre le corollaire 1.

Théorème 1. Si $\rho_1 = \text{tr}_2 \rho$ (ou $\rho_2 = \text{tr}_1 \rho$) décrit un état pur, alors ρ est décomposable i.e. $K(1,2) = 0$, $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 = (\text{tr}_2 \rho) \otimes (\text{tr}_1 \rho)$.

Considérons l'application linéaire ℓ_ρ

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}_2) \ni X \rightarrow \ell_\rho(X) = \text{tr}_2 \rho(1 \otimes X) \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1) \quad (18)$$

Pour $X = I$ on a $\ell_\rho(I) = \rho_1$, un état pur. On sait, par le lemme 1, que ℓ_ρ transforme un opérateur positif en opérateur positif. Dans la Fig. 1,

chapitre I de la 1^{ère} partie, appliqué à l'espace $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$, le plan \mathcal{E}_{N_1} des opérateurs de trace 1 coupe la sphère \mathcal{S}_{N_1} des vecteurs unités suivant la sphère \mathcal{S}_{N_1-1} . L'état pur $\rho_1 \in \mathcal{E}_{N_1}$ est à la fois sur \mathcal{S}_{N_1-1} et sur la surface du cône \mathcal{C}_{n_1} des opérateurs positifs dimension n_1 . Considérons l'hyperplan T de \mathcal{E}_{N+1} passant par l'origine O et tangent au point ρ_1 à la sphère \mathcal{S}_{N-1} . L'intersection $T \cap \mathcal{C}$ est la demi-droite $\{\lambda \rho_1\}$, $\lambda \geq 0$. Cet hyperplan T partage \mathcal{E}_{N+1} en deux régions dont une, ouverte, ne contient aucun point de \mathcal{C} , i.e. aucun opérateur ≥ 0 .

Considérons dans l'espace $\mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$ la boule B de rayon $\frac{1}{2}$ centrée au point $I \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$. Tous les opérateurs X de cette boule satisfont $\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}$. Ils sont donc positifs. Tout diamètre de cette boule est transformé par ℓ_ρ en un segment de droite centré au point ρ_1 , et qui doit être entièrement dans \mathcal{C} , puisque ses points sont l'image d'opérateurs positifs. Ce segment est donc porté par la génératrice $\{\lambda \rho_1\}$ de \mathcal{C} . Il en est de même de tous les points du voisinage B de $I \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_2)$. Cela prouve que l'application linéaire ℓ_ρ est de rang 1 et le lemme 2 prouve que ρ est décomposable.

Un corollaire du théorème que nous venons de prouver est

Corollaire 1. Si ρ_1 et $\rho_2 = \text{tr}_1 \rho$ (ou $\rho_2 = \text{tr}_2 \rho$) décrivent tous deux des états purs, alors ρ est décomposable en produit tensoriel de deux états purs.

En effet, le lemme 3 montre que $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ et l'équation (5^e) implique

$$1 = \text{rang } \rho = \text{rang } \rho_1 = \text{rang } \rho_2 .$$

3. Le domaine $\mathcal{D}(1,2)$ de polarisation à deux particules.

Dans la première partie, nous avons introduit sur l'espace \mathcal{E}_N ($N = n^2 - 1$) des matrices $n \times n$ hermitiques de trace 1 une distance euclidienne qui a été choisie telle que la distance de $\rho \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ à $\rho_0 = \frac{1}{n} I = \frac{1}{n_1 n_2}$ (l'état non polarisé) soit d_ρ , le degré de polarisation :

$$d_\rho = \left(\frac{n}{n-1} \text{tr}(\rho - \rho_0)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

Nous allons définir dans \mathcal{E}_N des sous espaces \mathcal{E}_{N_i} ($i = 1, 2$) que nous pourrions identifier aux espaces \mathcal{E}_{N_i} des matrices densité de chaque particule i . Pour cela nous faisons correspondre aux matrices ρ_1 et ρ_2 respectivement les matrices

$$j_1(\rho_1) = \rho_1 \otimes \frac{1}{n_2} I, \quad j_2(\rho_2) = \frac{1}{n_1} I \otimes \rho_2 \quad (20)$$

Ainsi les domaines de positivité \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont identifiés à des sous-domaines \mathcal{D}'_i de $\mathcal{D}(1,2)$. La métrique (19) induit sur les \mathcal{D}'_i (et les espaces \mathcal{E}_{N_i}) une métrique qui est homothétique à celle sur \mathcal{D}_i (et \mathcal{E}_{N_i}) le rapport d'homothétie étant λ_i

$$0 < \lambda_i = \left(\frac{n_i - 1}{n - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Nous démontrons cela en appendice ainsi que les faits suivants : les opérateurs P_i définis par

$$P_1(\rho) = \rho_1 \otimes \frac{1}{n_2} I, \quad P_2(\rho) = \frac{1}{n_1} I \otimes \rho_2 \quad (22)$$

$$\text{où } \rho_1 = \text{tr}_2 \rho, \quad \rho_2 = \text{tr}_1 \rho \quad (22')$$

définissent des projections orthogonales de \mathcal{E}_N sur \mathcal{E}_{N_i}

$$P_i(\mathcal{E}_N) = \mathcal{E}_{N_i} \quad (23)$$

$$P_i \mathcal{D}(1,2) = \mathcal{D}'_i \quad (23')$$

(voir Appendice 1).

Par la définition (22), on vérifie que

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 \quad (24)$$

En utilisant la décomposition (3) en bimultipôles,

$$P_1 \rho = \rho_1 \otimes \frac{1}{n_2} = \sum_{L_1=0}^{2j_1} \rho^{(L_1, 0)} \quad (25)$$

$$P_2 \rho = \frac{1}{n_1} \otimes \rho_2 = \sum_{L_2=0}^{2j_2} \rho^{(0, L_2)} \quad (25')$$

$$P_1 P_2 \rho = P_2 P_1 \rho = \rho_0 = \frac{1}{n} = \rho^{(0, 0)} \quad (25'')$$

Comme le montrent le lemme 1 et la définition (22) et (22') P_i projette les matrices positives sur des matrices positives. Donc la projection orthogonale de $\mathcal{D}(1,2)$ sur \mathcal{E}'_{N_1} est égale à l'intersection :

$$\mathcal{D}'_1 = P_i \mathcal{D}(1,2) = \mathcal{E}'_{N_1} \cap \mathcal{D}(1,2) \quad (26)$$

Mais, en général, \mathcal{E}'_{N_1} n'est pas un plan de symétrie de $\mathcal{D}(1,2)$.

De (24) et (25'') nous déduisons que P_1+P_2 réalise la projection orthogonale de \mathcal{E}_N sur $\mathcal{E}'_{N_1} \oplus \mathcal{E}'_{N_2}$. Il projette le domaine $\mathcal{D}(1,2)$ sur

$$(P_1+P_2)\mathcal{D}(1,2) = \mathcal{D}'_1 \times \mathcal{D}'_2 \quad (27)$$

où \times est le produit topologique, c'est l'intersection des hypercylindres de base \mathcal{D}'_1 et \mathcal{D}'_2 , et d'arêtes parallèles respectivement à \mathcal{E}'_{N_2} et \mathcal{E}'_{N_1} . En effet soit

$$r = \rho_1 \otimes \frac{1}{n_2} I + \frac{1}{n_1} I \otimes \rho_2 - \frac{1}{n} I$$

(où $\rho_i \in \mathcal{D}_i$) une matrice $\mathcal{D}'_1 \times \mathcal{D}'_2$. Elle est la projection de $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ sur $\mathcal{E}'_{N_1} \otimes \mathcal{E}'_{N_2}$ puisque $\text{tr}_2 r = \rho_1$, $\text{tr}_1 r = \rho_2$.

L'intersection $\mathcal{D}(1,2) \cap \mathcal{E}'_{N_1} \oplus \mathcal{E}'_{N_2}$ est toujours plus petite que la projection (sauf dans le cas trivial où l'un au moins des domaines \mathcal{D}_i est réduit à un point) et $\mathcal{E}'_{N_1} \oplus \mathcal{E}'_{N_2}$ n'est donc jamais un plan de symétrie de $\mathcal{D}(1,2)$.

En effet, l'intersection contient au moins $\mathcal{D}'(1,2)$ l'enveloppe convexe des deux intersections (équation (26)) :

$$\mathcal{D}'_1 = \mathcal{D}(1,2) \cap \mathcal{E}'_{N_1} \quad (28)$$

La frontière de $\mathcal{D}'(1,2)$ est constituée par les matrices de la forme

$$\rho = \lambda_1 \rho_1 \otimes \frac{1}{n_2} I + \lambda_2 \frac{1}{n_1} I \otimes \rho_2 \quad (29)$$

et $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\rho_i \in \partial \mathcal{D}_i$ (29')

Soit α_μ ($-j_1 \leq \mu \leq j_1$) et β_ν ($-j_2 \leq \nu \leq j_2$) les valeurs propres respectives de ρ_1 et ρ_2 . L'ensemble des valeurs propres de ρ donné par

(32) est :

$$\frac{\lambda_1}{n_2} \alpha_\mu + \frac{\lambda_2}{n_1} \beta_\nu \tag{30}$$

pour l'ensemble des valeurs des indices μ et ν . Or si les matrices densité ρ_1 et ρ_2 appartiennent toutes deux à la frontière $\partial\mathcal{D}_i$ de leur domaine respectif elles ont chacune au moins une valeur propre nulle et (30) montre qu'il en est de même pour ρ . Les matrices définies par (29) et (29'), qui sont sur la frontière de $\mathcal{D}'(1,2)$ sont donc bien sur la frontière de l'intersection de $\mathcal{D}(1,2)$

pour $\mathcal{E}'_{N_1} \oplus \mathcal{E}'_{N_2}$

$$\mathcal{D}(1,2) \cap \mathcal{E}'_{N_1} \oplus \mathcal{E}'_{N_2} = \mathcal{D}'(1,2) \tag{31}$$

La figure 2.1 résume la situation :

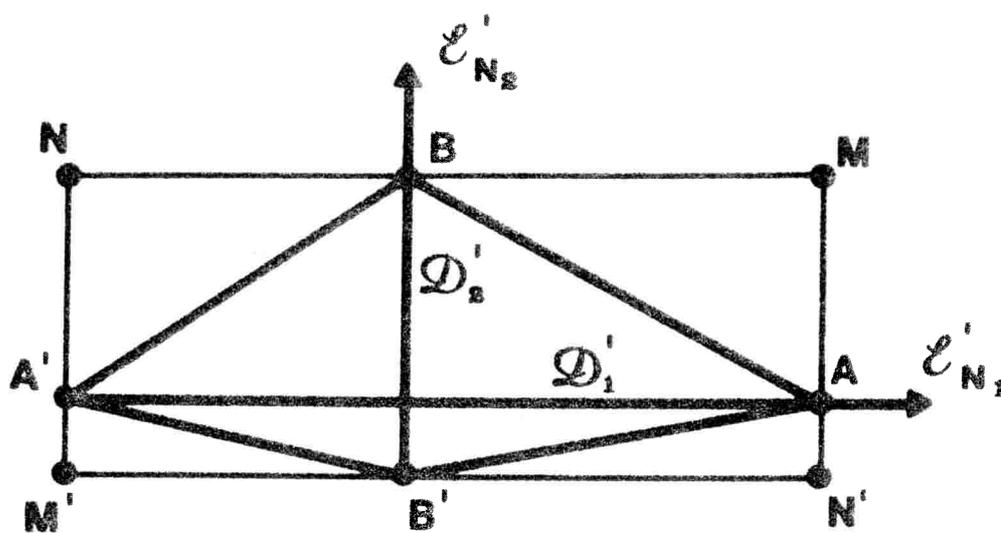


FIG.2.1

Figure 2.1 Intersection par et contour apparent sur $e'_{N_1} \oplus e'_{N_2}$ du domaine $\mathcal{D}(1,2)$. La figure est tracée pour $\dim e'_{N_1} = \dim e'_{N_2} = 1$. Sur la figure $AA' = \mathcal{D}'_1$, $BB' = \mathcal{D}'_2$, $NNM'N' = AA' \times BB'$ est le contour apparent et $ABA'B'$ est l'intersection.

4. Conditions sur $\hat{\mathcal{D}}(1,2)$ imposées par la production et l'observation.

Appliquons brièvement ici l'étude faite en IA.3 (1ère partie, chapitre 3) sur la B-symétrie (la réaction a un 3-plan de symétrie) en nous aidant aussi de IA.6 (I chap. 5).

La B-symétrie, quand on quantifie en transversité, impose la condition

$$\rho_{M_1 M_2}^{(L_1, L_2)} = 0 \quad \text{si } M_1 + M_2 \text{ impair} \quad (32)$$

Pour la quantification en hélicité, la B-symétrie impose

$$(\Gamma_1 \otimes \Gamma_2) \rho (\Gamma_1^{-1} \otimes \Gamma_2^{-1}) = \rho \quad (33)$$

Dans la Table 1, nous avons donné la dimension de $\hat{\mathcal{D}}(1,2)$: le domaine observé dans différentes conditions expérimentales pour une réaction avec faisceaux π , K ou \bar{p} donnant 2(quasi)-particules.

Nous n'avons pas fait figurer les conditions de rang.

Table I.1. - Number of polarization parameters for a B-symmetric system of two particles, with indication of the even or odd character related to each of them. The last number in each frame is the total number of (B-) symmetric or B-antisymmetric) parameters. The circled numbers give the parameters which can be measured in practice, for instance for the reaction indicated below.

$J_2 = \frac{1}{2}$ $J_1 = \frac{1}{2}$	$J_2 = 1$ $J_1 = \frac{1}{2}$	$J_2 = \frac{3}{2}$ $J_1 = \frac{1}{2}$	$J_2 = 2$ $J_1 = \frac{1}{2}$																																																
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>7^A</td></tr> </table>	e	o	Tot.	0	1	1	1	5	6	1	6	7 ^A	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>8</td><td>5</td><td>13</td></tr> <tr><td>11^B</td><td>6</td><td>17</td></tr> </table>	e	o	Tot.	3	1	4	8	5	13	11 ^B	6	17	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td>16</td><td>24</td></tr> <tr><td>11^C</td><td>20</td><td>31^D</td></tr> </table>	e	o	Tot.	3	4	7	8	16	24	11 ^C	20	31 ^D	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>8</td><td>4</td><td>12</td></tr> <tr><td>21</td><td>16</td><td>37</td></tr> <tr><td>29^E</td><td>20</td><td>49</td></tr> </table>	e	o	Tot.	8	4	12	21	16	37	29 ^E	20	49
e	o	Tot.																																																	
0	1	1																																																	
1	5	6																																																	
1	6	7 ^A																																																	
e	o	Tot.																																																	
3	1	4																																																	
8	5	13																																																	
11 ^B	6	17																																																	
e	o	Tot.																																																	
3	4	7																																																	
8	16	24																																																	
11 ^C	20	31 ^D																																																	
e	o	Tot.																																																	
8	4	12																																																	
21	16	37																																																	
29 ^E	20	49																																																	
15	35	63	99																																																
$J_2 = 1$ $J_1 = 1$	$J_2 = \frac{3}{2}$ $J_1 = 1$	$J_2 = 2$ $J_1 = 1$	$J_2 = 2$ $J_1 = 1$																																																
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>8</td><td>5</td><td>13</td></tr> <tr><td>27</td><td>13</td><td>40</td></tr> </table>	e	o	Tot.	8	5	13	27	13	40	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>19^F</td><td>8</td><td>27</td></tr> <tr><td>8</td><td>5</td><td>13</td></tr> <tr><td>27</td><td>13</td><td>40</td></tr> </table>	e	o	Tot.	19 ^F	8	27	8	5	13	27	13	40	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>19^G</td><td>28</td><td>47^H</td></tr> <tr><td>8</td><td>16</td><td>24</td></tr> <tr><td>27</td><td>44</td><td>71</td></tr> </table>	e	o	Tot.	19 ^G	28	47 ^H	8	16	24	27	44	71	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>47^I</td><td>28</td><td>75</td></tr> <tr><td>21</td><td>16</td><td>37</td></tr> <tr><td>68</td><td>44</td><td>112</td></tr> </table>	e	o	Tot.	47 ^I	28	75	21	16	37	68	44	112			
e	o	Tot.																																																	
8	5	13																																																	
27	13	40																																																	
e	o	Tot.																																																	
19 ^F	8	27																																																	
8	5	13																																																	
27	13	40																																																	
e	o	Tot.																																																	
19 ^G	28	47 ^H																																																	
8	16	24																																																	
27	44	71																																																	
e	o	Tot.																																																	
47 ^I	28	75																																																	
21	16	37																																																	
68	44	112																																																	
80	143	224	255																																																
$J_2 = \frac{3}{2}$ $J_1 = \frac{3}{2}$	$J_2 = 2$ $J_1 = \frac{3}{2}$	$J_2 = \frac{3}{2}$ $J_1 = \frac{3}{2}$	$J_2 = 2$ $J_1 = \frac{3}{2}$																																																
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>19^J</td><td>28</td><td>47^K</td></tr> <tr><td>28</td><td>52</td><td>80</td></tr> <tr><td>47</td><td>80</td><td>127^L</td></tr> </table>	e	o	Tot.	19 ^J	28	47 ^K	28	52	80	47	80	127 ^L	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>19^M</td><td>28</td><td>47</td></tr> <tr><td>72</td><td>52</td><td>124</td></tr> <tr><td>119^N</td><td>80</td><td>199</td></tr> </table>	e	o	Tot.	19 ^M	28	47	72	52	124	119 ^N	80	199	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>47^O</td><td>28</td><td>75</td></tr> <tr><td>72</td><td>52</td><td>124</td></tr> <tr><td>119</td><td>80</td><td>199</td></tr> </table>	e	o	Tot.	47 ^O	28	75	72	52	124	119	80	199	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>e</td><td>o</td><td>Tot.</td></tr> <tr><td>116^P</td><td>72</td><td>188</td></tr> <tr><td>72</td><td>52</td><td>124</td></tr> <tr><td>188</td><td>124</td><td>312</td></tr> </table>	e	o	Tot.	116 ^P	72	188	72	52	124	188	124	312
e	o	Tot.																																																	
19 ^J	28	47 ^K																																																	
28	52	80																																																	
47	80	127 ^L																																																	
e	o	Tot.																																																	
19 ^M	28	47																																																	
72	52	124																																																	
119 ^N	80	199																																																	
e	o	Tot.																																																	
47 ^O	28	75																																																	
72	52	124																																																	
119	80	199																																																	
e	o	Tot.																																																	
116 ^P	72	188																																																	
72	52	124																																																	
188	124	312																																																	
255	399	624	624																																																

Formulae (for n, n' , cf. II Table 0.1)

$N_{ee} = n_{es} + n_{es}' + n_{es}n_{es}' + n_{ea}n_{ea}'$
 $N_{eo} = n_{os} + n_{os}' + n_{os}n_{os}' + n_{ea}n_{ea}'$
 $N_{oe} = n_{os} + n_{os}n_{es}' + n_{oa}n_{ea}'$
 $N_{oo} = n_{os}n_{os}' + n_{oa}n_{oa}'$

Ex.

A : $\bar{p}p \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda}$	F : $\bar{p}p \rightarrow \bar{K}^*K^*$	K : $K^*d \rightarrow N^*Y^*$	
B : $\pi p \rightarrow \Lambda K^*$	G : $Kp \rightarrow K^*N^*$	L : $\bar{p}p \rightarrow \bar{Y}^*Y^*$	
C : $K^*d \rightarrow \Lambda N^*$	H : $\pi p \rightarrow K^*Y^*$	M : $Kp \rightarrow N^*K^*$	
D : $\bar{p}p \rightarrow \Lambda \bar{Y}^*$	I : $\bar{p}p \rightarrow \bar{K}^*K^*$	N : $\pi p \rightarrow Y^*K^*$	
E : $\pi p \rightarrow \Lambda K^*$	J : $\bar{p}p \rightarrow \bar{N}^*N^*$	P : $\bar{p}p \rightarrow \bar{K}^*K^*$	

5. Corrélations de spin $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; cas général.

La matrice ρ est 4×4 . Il est commode d'utiliser les notations de Dirac :

$$\rho_i = \tau_i \otimes 1 \quad , \quad \sigma_j = 1 \otimes \tau_j \quad (34)$$

où τ_i sont les matrices de Pauli.

Alors, les sommes sur les indices répétés étant sous entendus, $i, j, k, l = 1, 2, 3$

$$\rho = \frac{1}{4} (1 + a_i \rho_i + b_j \sigma_j + \rho_k c_{kl} \sigma_l) \quad (35)$$

où a_i, b_j, c_{kl} sont des nombres réels. Nous écrirons encore ρ

$$\rho = \frac{1}{4} (1 + \vec{a} \cdot \vec{\rho} + \vec{b} \cdot \vec{\sigma} + \vec{\rho} \cdot \vec{c} \cdot \vec{\sigma}) \quad (35')$$

où $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ se transforment respectivement suivant les représentations irréductibles $D^{(1)} \otimes D^{(0)}, D^{(0)} \otimes D^{(1)}, D^{(1)} \otimes D^{(1)}$ de $SO(3) \times SO(3)$, (voir équation (2)), autrement dit,

$$\rho^{(0,0)} = \frac{1}{4}, \rho^{(1,0)} = \vec{a} \cdot \vec{\rho}, \rho^{(0,1)} = \vec{b} \cdot \vec{\sigma}, \rho^{(1,1)} = \vec{\rho} \cdot \vec{c} \cdot \vec{\sigma} \quad (36)$$

Les traces partielles nous donnent :

$$\text{tr}_2 \rho = \rho_1 = \frac{1}{2} (1 + \vec{a} \cdot \vec{\tau}) \quad (37)$$

$$\text{tr}_1 \rho = \rho_2 = \frac{1}{2} (1 + \vec{b} \cdot \vec{\tau}) \quad (37')$$

d'où

$$K = \rho - \rho_1 \otimes \rho_2 = \rho_1 (c_{ij} - a_i b_j) \sigma_j = \vec{\rho} \cdot (\vec{c} - \vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{\sigma} = \vec{\rho} \cdot \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \quad (38)$$

De (37), (37') et du degré de polarisation $d_\rho = \frac{n}{n-1} \text{tr}(\rho - \frac{1}{n})^2$ nous déduisons déjà les conditions.

$$0 \leq \sum a_i^2 = \vec{a}^2 \leq 1, \quad 0 \leq \sum b_i^2 = \vec{b}^2 \leq 1 \quad (39)$$

$$0 \leq d_\rho = \left(\frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \quad (40)$$

où $\vec{c}^2 = \sum_{ij} c_{ij}^2 = \sum_{ij} c_{ij} (c^T)_{ji} = \text{tr} c c^T, \quad (41)$

en considérant c comme une matrice 3 par 3. Les matrices c, c^T agissent respectivement sur les vecteurs de variance $(0, \vec{b}), (\vec{a}, 0)$ de $SO(3) \times SO(3)$ pour les transformer en vecteurs de variance $(\vec{a}, 0), (0, \vec{b})$.

en terme de matrices

$$k = c - \vec{a} \otimes \vec{b} \quad (42)$$

Calculons ρ^2

$$\rho^2 = \frac{1}{4} (\lambda'^2 I + \vec{a}' \cdot \vec{\rho} + \vec{b}' \cdot \vec{\sigma} + \vec{\rho} \cdot \vec{\rho}' + \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}') \quad (43)$$

avec $4\lambda' = 1 + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \text{tr } cc^T = (1 + \vec{a}^2)(1 + \vec{b}^2) + 2 \vec{a} \cdot \vec{b} + \text{tr } k k^T$

$$2 \vec{a}' = \vec{a} + c \cdot \vec{b} = \vec{a}(1 + \vec{b}^2) + k \cdot \vec{b}$$

$$2 \vec{b}' = \vec{b} + c^T \vec{a} = \vec{b}(1 + \vec{a}^2) + k^T \vec{a}$$

$$2 c' = c + \vec{a} \otimes \vec{b} - c^T c = c + \vec{a} \otimes \vec{b} + k_T k + 2 k_T (a \otimes b)$$

$$\text{ou } c_1^T c_2 = \frac{1}{2} (c_1^T c_2^T + c_2^T c_1^T) - \frac{1}{2} c_1^T \text{tr } c_2 - \frac{1}{2} c_2^T \text{tr } c_1 - \frac{1}{2} I (\text{tr } c_1 c_2 - (\text{tr } c_1)(\text{tr } c_2)) \quad (44)$$

La matrice $c_T c$ est la matrice des mineurs du déterminant de c . Elle satisfait :

† En effet, la représentation irréductible $D^{(1)} \otimes D^{(1)}$ de $SO(3) \times SO(3)$ n'apparaît qu'une fois dans la réduction de son carré tensoriel $\otimes^2 (D^{(1)} \otimes D^{(1)})$ et elle se trouve être dans la partie symétrique. Cela définit donc une algèbre (non associative) symétrique, sur l'espace vectoriel réel des vecteurs de la représentation $D^{(1)} \otimes D^{(1)}$, espace que nous réalisons par les matrices 3 x 3 réelles c . Cette algèbre T a été étudié par Michel et Radicati : "Breaking of the $SU(3) \times SU(3)$ symmetry in hadronic physics" p. 191 "Evolution of particle physics" (dedicated to E. Amaldi) Academic Press New-York 1970, ainsi que : "Properties of the breaking of hadronic internal symmetry" App. 2, preprint, to appear in Ann. of Physics, dans le cas de la représentation $(3 \otimes 3) \otimes (3 \otimes 3)$ (matrice 3 x 3 complexes) de $SU(3) \times SU(3)$.

Il suffit ici de particulariser au sous groupe $SO(3)$ des matrices unitaires réelles et aux matrices 3 x 3 réelles).

$$c(c_T c)^T = (c_T c)^T c = (c_T c) c^T = c^T (c_T c) = I \det c \quad (44')$$

et on a

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_T (\vec{a} \otimes \vec{b}) = 0$$

Si la matrice 3×3 réelle r satisfait

$$r_T r = \epsilon r, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (45)$$

on déduit de (44') que r est orthogonale et de déterminant ϵ .

Pour deux matrices ρ' , ρ'' écrites sous la forme (35), la trace es

$$\text{tr } \rho' \rho'' = \frac{1}{4} (\lambda' \lambda'' + \vec{a}' \cdot \vec{a}'' + \vec{b}' \cdot \vec{b}'' + \text{tr } c' c''^T) \quad (46)$$

nous obtenons ainsi pour ρ de (35)

$$\text{tr } \rho = 1, \quad \text{tr } \rho^2 = \frac{1}{4} (1 + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \text{tr } c c^T)$$

$$\text{tr } \rho^3 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \lambda' + \frac{3}{8} \mu \quad \text{où } \mu = \vec{a} \cdot c \cdot \vec{b} - \det c$$

$$\text{tr } \rho^4 = \frac{1}{4} (\lambda'^2 + \lambda' - \frac{1}{4}) + \frac{3}{8} \mu + \frac{1}{16} \varphi$$

$$\text{où } \varphi = \vec{a} \cdot c \cdot c^T \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot c^T \cdot c \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 \vec{b}^2 - 2 \vec{a} \cdot (c_T c) \vec{b} + \text{tr}(c_T c) (c_T c)^T$$

Les conditions de positivités s'écrivent (voir Minnaert Phys. Rev. 151-1306, 1966)

$$1 - \text{tr } \rho^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - d_\rho^2 \geq 0 \quad (47)$$

$$2 \text{tr } \rho^3 - 3 \text{tr } \rho^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 3 d_\rho^2 + 2 \mu \geq 0 \quad (48)$$

$$24 \det \rho = -6 \text{tr } \rho^4 + 8 \text{tr } \rho^3 + 3(\text{tr } \rho^2)^2 - 6 \text{tr } \rho^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \quad (49)$$

$$(1 - 3 d_\rho^2)^2 + 8 \mu - 4 \varphi \geq 0$$

Le théorème 1 nous permet d'affirmer que

$$\vec{b}^2 = 1 \Rightarrow k = 0$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que c'est aussi une conséquence

de $\vec{b}^2 = 1$ et de (47), (48), (49). Les états purs correspondent aux égalités pour ces équations, soit :

$$d_\rho = 1, \mu = 1, \varphi = 3 \quad (50)$$

Nous pouvons obtenir des conditions équivalentes (bien qu'elles semblent plus fortes [†]) de $\rho^2 = \rho$. On obtient ainsi les 4 équations :

$$\lambda' = \lambda \Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \text{tr } c c^T = 3 \quad (51)$$

$$\vec{a}' = \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = c \cdot \vec{b} \quad (51')$$

$$\vec{b}' = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = c^T \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot c \quad (51'')$$

$$c' = c \Leftrightarrow c = \vec{a} \otimes \vec{b} - c_T c \quad (51''')$$

Nous en déduisons

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot c \cdot \vec{b} = \vec{b}^2 \quad (52)$$

Dans un état pur de polarisation du système des deux particules, chaque particule a même degré $\chi^{\frac{1}{2}}$ de polarisation individuelle :

$$0 \leq \chi \leq \vec{a}^2 = \vec{b}^2 \leq 1 \quad (52')$$

En utilisant (44'), nous obtenons :

$$c c^T = -I \det c + \vec{a} \otimes \vec{b}, \quad c^T c = -I \det c + \vec{b} \otimes \vec{a} \quad (53)$$

En prenant la trace nous obtenons, avec (51)

$$\det c = -(1-\chi) \quad (54)$$

Ces équations se traduisent pour la corrélation $k = c - \vec{a} \otimes \vec{b}$ par

$$k k^T = (1-\chi)(I - \vec{a} \otimes \vec{a}), \quad k^T k = (1-\chi)(I - \vec{b} \otimes \vec{b}) \quad (55)$$

ce qui fournit immédiatement la solution dans les deux cas particuliers :

[†] On trouve l'égalité dont le 1er membre n'a que des termes ≥ 0 :

$$(\vec{a} - c\vec{b}) \cdot (\vec{a} - c\vec{b}) + (\vec{a}c - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \cdot c - \vec{b}) + \text{tr}(c + c_T c - \vec{a} \otimes \vec{b})(c + c_T c - \vec{a} \otimes \vec{b})^T = 3d^2 - 6\mu + \varphi$$

ce qui est nul par (50). Donc chaque terme est nul ; on obtient ainsi les 3 équations (51'), (51''), (51''').

$\chi = 0$ (c'est-à-dire $\vec{a} = 0 = \vec{b}$) alors $k = c$ est une matrice orthogonale de déterminant -1 . (Comparer aussi (51''') et (45)).

Exemple : $k = -1$, $\rho = \frac{1}{4} (1 - \vec{\rho} \cdot \vec{\sigma})$ qui est l'état singlet de spin.

$\chi = 1$, alors $kk^T = 0 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow c = \vec{a} \otimes \vec{b}$; il n'y a pas de corrélations, comme l'impose le théorème 1. Dans le cas général $0 \leq \chi \leq 1$ on peut choisir \vec{a} , \vec{b} arbitraires satisfaisant (52') et on trouve :

$$c = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \chi}} \vec{a} \otimes \vec{b} + \sqrt{1 - \chi} r \quad (56)$$

où r est une matrice orthogonale, de déterminant -1 , qui transforme \vec{b} en \vec{a} . Si $\chi \neq 0$ une telle matrice dépend d'un paramètre arbitraire ω , qui avec χ et les directions de \vec{a} et \vec{b} , paramétrise la variété à 6 dimensions des états purs de spin $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. Nous rencontrerons le cas $\vec{b} = \pm \vec{a}$ au paragraphe suivant, équation (69).

6. Corrélations de spin $\frac{1}{2}$, B-symétriques.

La B-symétrie implique

$$a_1 = a_2 = 0 = b_1 = b_2, \quad c_{13} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = 0. \quad (57)$$

Les conditions de positivité pour le domaine $\mathcal{D}(1,2)_B$ sont

$$(1 + c_{33})^2 - (a_3 + b_3)^2 - (c_{11} - c_{22})^2 - (c_{12} + c_{21})^2 \geq 0 \quad (58)$$

$$(1 - c_{33})^2 - (a_3 - b_3)^2 - (c_{11} + c_{22})^2 - (c_{12} - c_{21})^2 \geq 0 \quad (58')$$

Puisqu'il s'agit d'une matrice B-symétrique 4×4 , le domaine est le même que celui des états B-symétriques d'une particule de spin $\frac{3}{2}$. Nous l'avons étudié en II.4. C'est le domaine de positivité de la somme directe de 2 matrices 2×2 dont la somme des traces est 1.

Plutôt que de renvoyer à II.4, nous allons donner une autre représentation, par projections, de ce domaine, mieux adapté à la signification physique des coordonnées : $a_3, b_3, c_{33}, c_{11}, c_{22}, c_{21}, c_{12}$.

Nous considérons aussi un autre système de coordonnées orthogonales

$$c_{33}, z = (a_3 + b_3)/\sqrt{2}, z' = (b_3 - a_3)/\sqrt{2}, x' = (c_{11} + c_{22})/\sqrt{2}, \quad (59)$$

$$x = (c_{11} - c_{22})/\sqrt{2}, y = (c_{12} + c_{21})/\sqrt{2}, y' = (c_{12} - c_{21})/\sqrt{2} \quad (59')$$

pour lequel les inégalités définissant $\mathcal{D}(1,2)_B$ sont :

$$\frac{1}{2}(1 + c_{33})^2 - z^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad (60)$$

$$\frac{1}{2}(1 - c_{33})^2 - z'^2 - x'^2 - y'^2 \geq 0 \quad (60')$$

nous utiliserons aussi les coordonnées polaires

$$q = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r = (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (61)$$

L'ensemble des matrices positives somme directe de deux matrices 2×2 est invariant par le groupe $SU(2) \times SU(2)$. Cette invariance est explicite pour les équations (60) et (60') qui sont invariantes pour le groupe des rotations dans le 3-plan xyz et pour le groupe des rotations dans le 3-plan $x'y'z'$. La table 2-1 donne la liste des éléments de symétrie de ce domaine $\mathcal{D}(1,2)_B$ ainsi que celle des plans intersection des plans de symétrie. Nous démontrons dans l'appendice que pour ces plans, contour apparent et intersection du domaine $\mathcal{D}(1,2)_B$ sont confondus.

TABLE 2-1 : Liste des éléments de symétrie du domaine $\mathcal{D}(1,2)_B$.
 les k-plans de symétrie sont définis par les axes qui les engendrent.

Nombre	Nature	Défini par
1	1-plan-axe	c_{33}
∞^2	2-plan	c_{33} et un vecteur dans l'espace $x y z$
∞^2	2-plan	c_{33} et un vecteur dans l'espace $x'y'z'$
∞^2	3-plan	c_{33} et un 2-plan dans l'espace $x y z$
∞^2	3-plan	c_{33} et un 2-plan dans l'espace $x'y'z'$
∞^4	3-plan	c_{33} un vecteur de l'espace xyz et un vecteur de l'espace $x'y'z'$
8	3-plan	une coordonnée de chaque paire $(a_3, b_3), (c_{11}, c_{22}), (c_{12}, c_{21})$
2	4-plan	c_{33} $x y z$ et c_{33} $x'y'z'$
∞^4	4-plan	c_{33} , deux des coordonnées xyz et une des coordonnées $x'y'z'$
∞^4	4-plan	c_{33} , une des coordonnées xyz et deux des coordonnées $x'y'z'$
∞^2	5-plan	c_{33} , trois des coordonnées xyz et une des coordonnées $x'y'z'$
∞^2	5-plan	c_{33} , une des coordonnées xyz et trois des coordonnées $x'y'z'$
∞^4	5-plan	c_{33} , deux des coordonnées xyz et deux des coordonnées $x'y'z'$
$2\infty^2$	6-plan	c_{33} , et cinq des coordonnées $xyz, x'y'z'$

Liste des 18 plans, intersections de plans de symétrie qui ne sont pas eux-mêmes plans de symétrie. Pour ces plans, l'intersection et le contour apparent de $\mathcal{D}(1,2)_B$ sont confondus.

6	1-plan	les six axes de coordonnées $a_3, b_3, c_{11}, c_{22}, c_{12}, c_{21}$
12	2-plan	deux des coordonnées dans deux différentes des trois paires $(a_3, b_3), (c_{11}, c_{22}), (c_{12}, c_{21})$.

Sur un plan de symétrie, contour apparent et intersection sont confondus.
 Etudions-les pour certains éléments de symétrie :

Pour l'axe c_{33} nous trouvons :

$$-1 \leq c_{33} \leq 1 \quad (62)$$

Pour le 3-plan de symétrie $\{c_{33}, a_3, b_3\}$:

$$\begin{aligned} 1 + c_{33} - a_3 - b_3 &\geq 0 \\ 1 + c_{33} + a_3 + b_3 &\geq 0 \\ 1 - c_{33} - a_3 + b_3 &\geq 0 \\ 1 - c_{33} + a_3 - b_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad (63)$$

Pour le 3-plan $\{c_{33}, x, y\}$:

$$(1+c_{33})^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \quad -1 \leq c_{33} \leq 1 \quad (64)$$

Sur le 3-plan $\{c_{33}, x', y'\}$:

$$(1-c_{33})^2 - x'^2 - y'^2 \geq 0, \quad -1 \leq c_{33} \leq 1 \quad (65)$$

Les équations (63) définissent le tétraèdre des matrices diagonales positives. Il est tracé sur la figure 2.2.

Les équations (64) et (65) définissent les cônes de révolution (Q) et (R) représentés sur la figure 2.3.

Les espaces de polarisation de chaque particule, \mathcal{E}'_{N_1} et \mathcal{E}'_{N_2} sont à une seule dimension. Ce sont les axes a_3 et b_3 . Nous vérifions le résultat général (26) que pour chacun de ces axes, contour apparent et intersection sont confondus.

L'espace $\mathcal{E}'_{N_1} \oplus \mathcal{E}'_{N_2}$ est ici le 2-plan engendré par a_3 et b_3 . Nous vérifions encore les résultats généraux de la Fig. 2-1, son intersection avec $\mathcal{D}(1,2)_B$ est ici le carré $ABA'B'$, tracé sur le tétraèdre de la figure. Le contour apparent de $\mathcal{D}(1,2)_B$ sur ce deux-plan est le carré $MNM'N'$, (carré (P) de la figure 2.3). C'est la projection du tétraèdre $M_0N_0M'_0N'_0$ des équations (6.

La figure 2.3 contient un choix de projections sur trois 2-plan et un axe :

$$(a_3, b_3), (x, y), (x', y'), c_{33} \quad (66)$$

mutuellement orthogonaux. Un point de $\mathcal{D}(1,2)_B$ est donc défini par ses projections :

$$P \in (a_3, b_3) ; Q' \in (x, y) , R' \in (x', y') , C \in c_{33} \quad (67)$$

Par exemple, l'état non polarisé a pour projection P_0, Q'_0, R'_0 et $Q_0 = R_0$. Nous avons tracé en plus les sections méridiennes de chaque cône de révolution (64), (65) afin d'établir par une construction graphique si le point de projection P, Q', R', C est dans le domaine $\mathcal{D}(1,2)_B$. Soit ρ une matrice densité de $\mathcal{D}(1,2)_B$. Sa projection P sur (P) est fournie par la valeur a_3, b_3 de la polarisation indépendante de chaque particule. Le sous domaine (a cinq dimension de $\mathcal{D}(1,2)_B$ qui se projette sur le point P se projette sur $\{c_{33} xy\}$ et $\{c_{33}, x'y'\}$ suivant deux calottes d'hyperboloïde de révolution d'axe c_{33} , qui ont pour cônes asymptotes les cônes (Q) et (R). Les sommets des orbites sont Q_2 et R_2 et leurs cercles de base sont respectivement dans les plans $c_{33} = 1$, $c_{33} = -1$. Les équations de leurs sections méridiennes sont † (a_3, b_3 fixé)

$$(1+c_{33})^2 - 2q^2 = (a_3+b_3)^2 = (\overline{PP_1})^2 ; \quad -1 \leq c_{33} \leq 1 \quad (67)$$

$$(1-c_{33})^2 - 2r^2 = (a_3-b_3)^2 = (\overline{PP_2})^2 , \quad -1 \leq c_{33} \leq 1$$

Ces sections sont tracées en figure 2.3 à l'intérieur des méridiennes des cônes (64) et (65). Les coordonnées c_{33} des sommets Q_2 et R_2 sont

$$\text{pour } Q_2 , \quad c_{33} = \overline{PP_1} - 1 = \overline{Q_2Q_{-1}} - 1$$

$$\text{pour } R_2 , \quad c_{33} = 1 - \overline{PP_2} = 1 - \overline{R_2R_1}$$

† Nous utilisons la notation \overline{AB} pour la longueur du segment AB , P_1 et P_2 sont l'intersection avec les axes Oz' et Oz de la parallèle à AA' menée par P .

Pour savoir si le point de projection P, Q', R', C appartient au domaine $\mathcal{D}(1,2)_B$ il suffit de vérifier que les points Q, R des sections méridiennes, obtenus à partir de $Q'C$ et $R'C$ sont bien à l'intérieur des sections méridiennes des calottes d'hyperboloïde de révolution obtenues à partir de P .

Dans la figure 2.3 nous avons pris la métrique :

$$0 \leq \overline{\rho\rho_0} = 3d_\rho = (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \text{tr } cc^T)^{\frac{1}{2}} \leq 3 .$$

Elle donne la métrique usuelle pour les polarisations indépendantes des particules \dagger . Les états purs sont donc à la distance $\sqrt{3}$ du point ρ_0 polarisé ($P_0, Q_0', R_0', Q_0 = R_0$). Comme nous l'avons vu en II.4, l'ensemble des états purs forme deux sphères à deux dimensions. En réduisant les équations (52) et (56) à notre cas particulier, nous obtenons, pour les états purs, en fonction des paramètres

$$b_3 = \eta a_3 \quad \text{avec} \quad \eta^2 = 1 \tag{69}$$

$$c = \begin{vmatrix} \sqrt{1-\chi} \cos \omega & \sqrt{1-\chi} \sin \omega & 0 \\ \eta\sqrt{1-\chi} \sin \omega & -\eta\sqrt{1-\chi} \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{vmatrix} \tag{69'}$$

où $\chi = (a_3)^2 = (b_3)^2$.

Les équations de ces deux sphères sont données par

$$S_2 : \eta = 1 \quad c_{33} = 1 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad x' = y' = z' = 0$$

$$S_2' : \eta = -1 \quad c_{33} = -1 \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2 \quad x = y = z = 0$$

Ces sphères ont donc pour diamètres les arêtes $c_{33} = \pm 1$ du tétraèdre (arêtes M_0M_0' et N_0N_0' de la figure 2.2).

\dagger Il suffit de multiplier les longueurs par $\frac{1}{\sqrt{3}}$ pour normaliser à 1 la longueur des états purs de la polarisation jointe des deux particules.

Leurs projections dans la Fig. 2.3 sont

$$S_2 : P \in MM', R'_0, Q_1, Q' \in \text{cercle de centre } Q'_0 \text{ de rayon } (2 - \overline{P_0 P^2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(1 - \overline{P_1 P^2})^{\frac{1}{2}}$$

$$S'_2 : P \in NN', Q'_0, R_{-1}, R' \in \text{cercle de centre } R'_0 \text{ de rayon } (2 - \overline{P_0 P^2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(1 - \overline{P_2 P^2})^{\frac{1}{2}} .$$

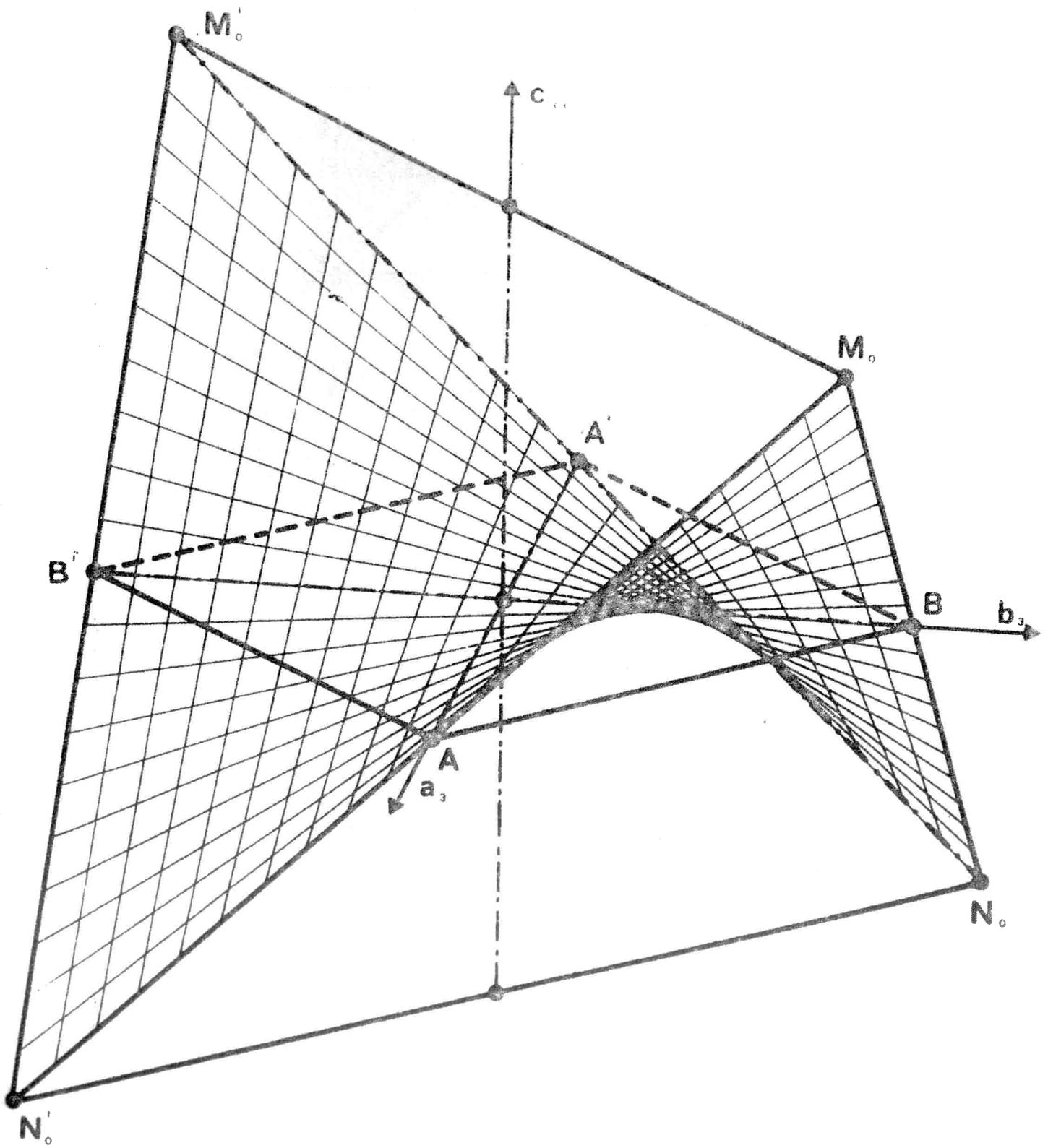


FIG.2.2

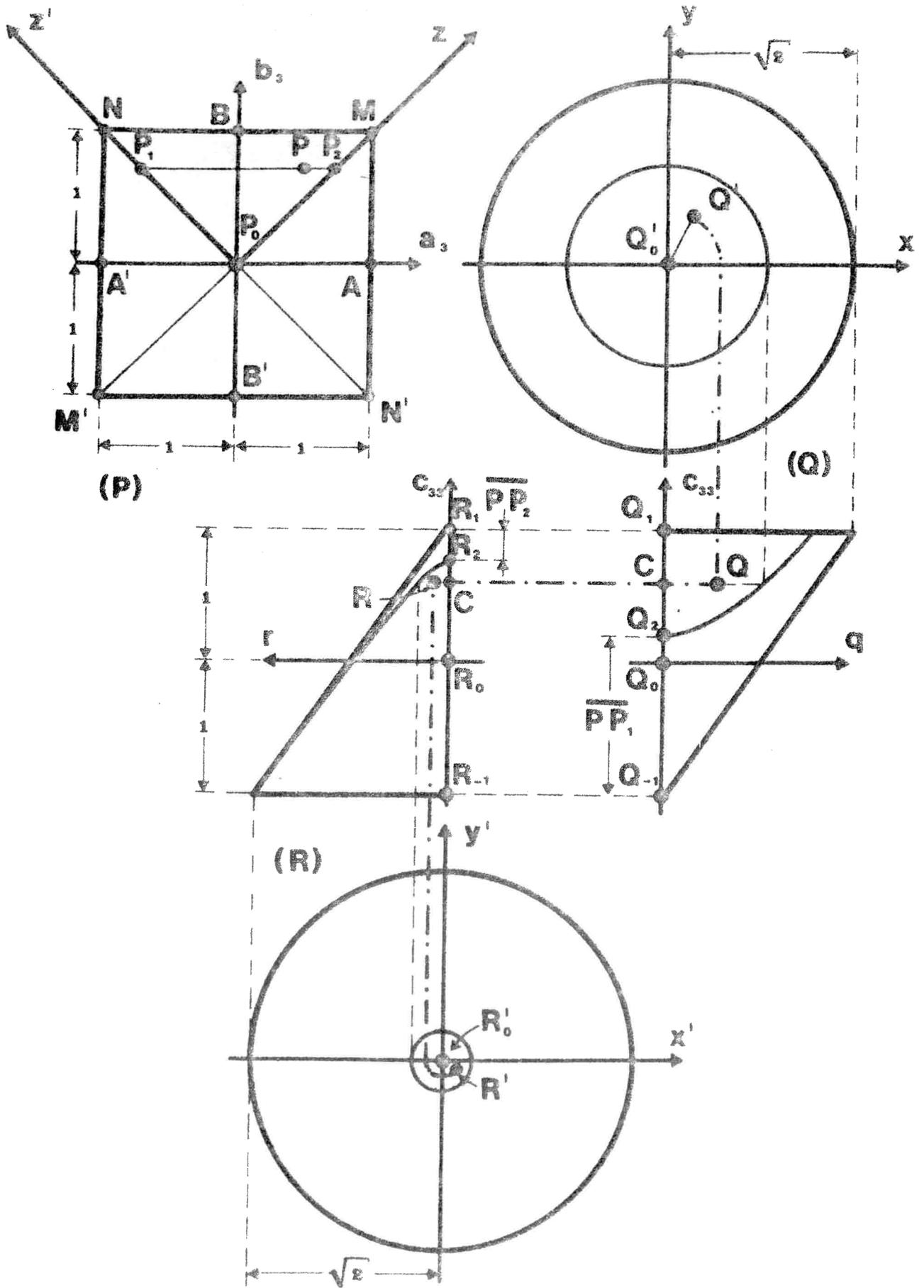


FIG. 2.3

PARTIE III. APPENDICE 1.

LES PROJECTIONS P_i .

Dans le texte nous avons posé $n = n_1 n_2$ et nous avons toujours noté $\mathcal{E}_{N+1}, \mathcal{E}_{N_i+1}$, ($i = 1, 2$) les espaces vectoriels réels des matrices hermitiques $n \times n$, $n_i \times n_i$ et $\mathcal{E}_N, \mathcal{E}_{N_i}$ leurs sous-espaces de matrices de trace 1. Nous notons i, i_i l'injection canonique

$$\mathcal{E}_N \xrightarrow{i} \mathcal{E}_{N+1}, \quad \mathcal{E}_{N_i} \xrightarrow{i_i} \mathcal{E}_{N_i+1}$$

et par p, p_i les projections canoniques :

$$\mathcal{E}_{N+1} \xrightarrow{p} \mathcal{E}_N, \quad \mathcal{E}_{N_i+1} \xrightarrow{p_i} \mathcal{E}_{N_i}$$

On a $p \circ i = \text{Identité sur } \mathcal{E}_N$, $p_i \circ i_i = \text{Identité sur } \mathcal{E}_{N_i}$. En fin sur $\mathcal{E}_N, \mathcal{E}_{N_i}$ nous avons défini les métriques euclidiennes

$$d^2(\rho', \rho'') = \frac{n}{n-1} \text{tr}(\rho' - \rho'')^2$$

$$d_i^2(\rho'_i, \rho''_i) = \frac{n_i}{n_i-1} \text{tr}(\rho'_i - \rho''_i)^2$$

les degrés de polarisation sont respectivement les racines carré positives de $d(\rho, \frac{1}{n}I)$, $d(\rho_i, \frac{1}{n_i}I)$. On pose $\hat{\Gamma} \neq i$, c'est-à-dire pour $i = 1, 2, \hat{\Gamma} = 2, 1$. En utilisant (20) on vérifie que

$$d(j_i(\rho_i), \frac{1}{n}) = \frac{n}{n-1} \text{tr} \frac{1}{n_i} I \text{tr}(\rho_i - \frac{1}{n_i}I)^2 = \frac{n(n_i-1)}{(n-1)n_i n_i} d_i(\rho_i, \frac{1}{n_i}I)$$

ce qui démontre (21).

Rappelons qu'un opérateur P sur un espace vectoriel réel \mathcal{E} avec le produit scalaire (A, B) est symétrique (c'est-à-dire sa matrice est symétrique : $P^T = P$) si $(PA, B) = (A, PB)$ pour toute paire $A, B \in \mathcal{E}$. Si P est un projecteur symétrique, la projection qu'il réalise est dite orthogonale. En utilisant $P = P^2 = P^T$ on établit immédiatement que : le projecteur P réalise une projection orthogonale si et seulement si $\forall A, (PA, PA) = (PA, A)$

La figure 1 montre la propriété géométriquement

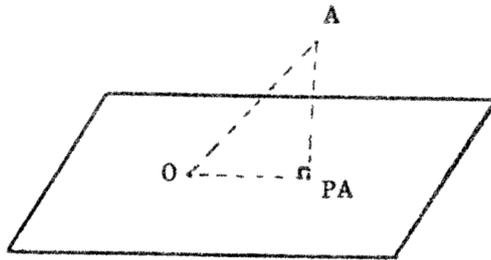


Figure 1. $\overline{A, PA} \perp \overline{O, PA} \Leftrightarrow (A, PA) = (PA, PA)$.

Les opérateurs P_i définis par (22) s'écrivent encore :

$$P_i = j_i \circ tr_i \tag{A 2}$$

En notant que $tr_i \circ j_i = \text{Identité sur } \mathcal{E}_{N_i+1}$ on vérifie immédiatement que P_i est un projecteur :

$$P_i^2 = j_i \circ tr_i \circ j_i \circ tr_i = j_i \circ tr_i = P_i$$

De même en définissant $\tilde{j}_i, \mathcal{E}_{N_i} \xrightarrow{\tilde{j}_i} \mathcal{E}'_{N_i} \subset \mathcal{E}_N$ par $i \circ \tilde{j}_i \circ \rho = j_i$ et $\tilde{P}, \mathcal{E}_N \xrightarrow{\tilde{P}} \mathcal{E}'_{N_i}$ par $i_i \circ \tilde{P} \circ \rho = P$, on a bien $\tilde{P}^2 = \tilde{P}$.

En (17) nous avons défini (en posant $\rho_i = tr_i \rho$)

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 + K(1,2) \tag{A 2}$$

et
$$tr_1 K(1,2) = 0 = tr_2 K(1,2) \tag{A 3}$$

En notant que $P_1 \rho = \rho_1 \otimes \frac{1}{n_2} I$ nous avons

$$\begin{aligned} (\rho, P_1 \rho) &= tr(\rho_1 \otimes \rho_2 + K(1,2))(\rho_1 \otimes \frac{1}{n_2} I) \\ &= \frac{1}{n_2} tr \rho_1^2 + \frac{1}{n_2} tr(tr_2(\rho \otimes I)K(1,2)) \end{aligned}$$

le dernier terme est nul puisque $tr_2 K(1,2) = 0$ d'où $(\rho, P_1 \rho) = \rho_1^2 \otimes \frac{1}{n_2} = (P_1 \rho, P_1 \rho)$; ce qui montre que P_1 est symétrique. Il en est de même pour P_2 et pour \tilde{P}_i .

REFERENCES

- Ademollo - Gatto - 64
M. Ademollo and R. Gatto
Phys. Rev. 133 , 531 (1964)
- Ademollo - Gatto - Preparata - 65
M. Ademollo, R. Gatto, and G. Preparata
Phys. Rev. 140 , B 192 (1965)
- Ader-Capdeville - Cohen-Tannoudji - Salin - 68
J.P. Ader, M. Capdeville, G. Cohen-Tannoudji and Ph. Salin
Nu. Cim. 56A , n°4 , 952 (1968)
- Bargman - Michel - Telegdi - 59
V. Bargman, L. Michel and V. Telegdi
Phys. rev. Lett. 2 , 435 (1959)
- Bargman - Wigner - 48
V. Bargman and E.P. Wigner
Nat. Acad. Sci. 34 , 211 (1948)
- Basel - 61
Proceedings of the International Symposium on Polarization Phenomena
of Nucleons, Basel, Switzerland, 1960
Helv. Phys. Acta, Suppl. 6 , 436 (1961)
- Bialas - Zalewski - 68
A. Bialas and K. Zalewski
Nuc. Phys. B6 , 465 (1968)
- Bohr - 59
A. Bohr
Nucl. Phys. 10 , 486 (1959)
- Byers - Fenster - 63
N. Byers and S. Fenster
Phys. Rev. Let. 11 , 52 (1963)
- Cohen-Tannoudji - Morel - Navelet - 68
G. Cohen-Tannoudji, A. Morel and H. Navelet
Ann. Phys. 46 , 2 , 239 (1968)
- Condon - Shortley - 35
E.U. Condon and G.H. Shortley
The theory of atomic spectra
University Press, Cambridge (1935)
- Dalitz - 66
R.H. Dalitz
Nucl. Phys. 87 , 89 (1966)

Doncel - 67

M.G. Doncel

Nu. Cim. 22 , A-617 , (1967)

Doncel - Michel - Minnaert

M. Doncel, L. Michel and P. Minnaert

Polarization density matrix

(To be published) - Several preprints

Donohue - Hogaasen - 67

J.T. Donohue and H. Hogaasen

Phys. Let. 25B , 554 (1967)

Edmonds - 57

A.R. Edmonds

Angular Momentum in Quantum Mechanics

Princeton University Press, Princeton, New-Jersey, (1957)

Fano - 57

G. Fano

Rev. Mod. Phys. 29 , 74 (1957)

Gilman - Pumpilin - Schwimmer - Stodolsky - 70

F.J. Gilman, J. Pumpilin, A. Schwimmer and I. Stodolsky

Phys. Let. 31B , 387 (1970)

Gottfried - Jackson - 64

K. Gottfried and J.D. Jackson

Nu. Cim. 33 , 309 (1964)

Gottfried - Jackson - 64

K. Gottfried and J.D. Jackson

Nu. Cim. 34 , 735 (1964)

Harari - Lipkin - 65

H. Harari and H.J. Lipkin

Phys. Rev. 140 , B-1617 (1965)

Henry - de Rafael - 65

C. Henry and E. de Rafael

Ann. Inst. Henri Poincaré 2 , 87 (1965)

Jackson - 65

J.D. Jackson

in High Energy Physics, Les Houches 1965

Gordon and Beach, Science Publishers, Inc., New-York (1966)

Jacob - Wick - 59

M. Jacob and G.C. Wick

Ann. of Phys. 7 , 404 (1959)

Kotanski - Zalewski - 68

A. Kotanski and R. Zalewski

Nucl. Phys. B4 , 559 (1968)

Lakin - 55

W. Lakin

Phys. Rev. 98 , 139 (1955)

Lubanski - 42

J.L. Lubanski

Physica 9 , 310 (1942)

Michel - 59

L. Michel

Suppl. Nu. Cim. 14 , 95 (1959)

Michel - 64

L. Michel

I.H.E.S. (1964)

Michel - Radicati - 70

L. Michel and L. Radicati

Evolution of Particle Physics

Academic Press, p.191, New-York (1970)

Michel - Rouhaninejad - 61

L. Michel and H. Rouhaninejad

Phys. Rev. 122 , 242 (1961)

Michel - Wightman - 55

L. Michel and A. Wightman

Phys. Rev. 98 , 1190 (1955)

Minnaert - 66

P. Minnaert

Phys. Rev. Lett. 16 , 672 (1966)

Minnaert - 66

P. Minnaert

Phys. Rev. 151 , 1306 (1966)

Morrisson

D.R.O. Morrison

Proceedings of the Lund International Conference, p.261 (1969)

Moussa - Stora - 66

P. Moussa and R. Stora

Rapport Saclay et Ecole d'Eté d'Hercegovi (Septembre 1966)

Poincaré - 84

H. Poincaré

Théorie Mathématique de la lumière (1884)

Racah - 42

G. Racah

Phys. Rev. 62 , 437 (1942)

De Rafael - 66

E. de Rafael

Théorie relativiste des corrélations angulaires et application
à l'analyse phénoménologique des particules et résonances
Ann. Inst. Henri Poincaré, V2 , 83 - 204 (1966)

Ringland - Thews - 68

G.A. Ringland and R.L. Thews

Phys. Rev. 170 , 1569 (1968)

Rose - 57

M.E. Rose

Elementary theory of angular momentum
Wiley, New-York 1957

Stodolsky - 64

L. Stodolsky

Phys. Rev. 134 , B-1099 (1964)

Stodolsky - Sakurai - 63

L. Stodolsky and J.J. Sakurai

Phys. Rev. Let. 11 , 90 (1963)

Stokes - 52

G. Stokes

Proc. Camb. Phil. Soc. 9 , (1852)

Stora - 63

R. Stora

Le Groupe de Poincaré
(Notes miméographiées) - Saclay (1963)

Thews - 69

R.L. Thews

Phys. Rev. 188 , 2264 (1969)

Van Hove - 69

L. Van Hove

Nucl. Phys. B 9 , 331 (1969)

Wightman - 60

A. Wightman

L'invariance en Mécanique Quantique relativiste
Les Houches (1960)

Wigner - 39

E.P. Wigner

Ann. Math. 40 , 149 (1939)

Wigner - 59

E.P. Wigner

Group theory and its application to the quantum mechanics of
atomic spectra
Academic Press, New-York (1959)