INTRODUCTION AU COLLOQUE LE GROUPE DE POINCARÉ

par L. MICHEL

Institut des Hautes Etudes Scientifiques - Mures-sur-Yvette

Cette première journée du colloque est consacrée au groupe de Poincaré et à ses relations avec les groupes de symétrie des particules élémentaires. De nombreux travaux sont parus à ce sujet dans les journaux de physique. Il n'est pas question de les passer en revue dans cette conférence d'introduction. Je voudrais simplement rappeler ici quelques résultats, ceux qui me paraissent les plus importants sur ce sujet.

Il est inutile de donner des définitions que tous les membres de cette audience connaissent. Je me contenterai donc d'indiquer les notations.

Pour tout point x de l'espace-temps $\mathcal{E}$ (espace affine réel à quatre dimensions), le produit intérieur de Minkovski permet de définir Γ_x^+ (respectivement Γ_x^-) l'intérieur du cône futur (resp. passé) de x, $\partial\Gamma_x^+$, $\partial\Gamma_x^-$, leur frontière moins x. Nous notons $\Gamma_x = \Gamma_x^+ \cup \Gamma_x^-$ et sa fermeture $\overline{\Gamma}_x$ est le cône de lumière de x, c'est-à-dire l'ensemble des points y tels que $(x - y) . (x - y) = 0$.

Le groupe de Lorentz $\mathcal{L}$ est le groupe des transformations linéaires qui laissent fixe un point x et préservent le produit intérieur de Minkovski. Si on exige de plus que le sens du temps soit préservé, on se restreint alors au sous-groupe orthochrone $\mathcal{L}^{\uparrow}$, le groupe total étant le produit direct $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\uparrow} \times Z_2$ où Z_2 est le groupe de deux éléments : $\mathcal{L}^{\uparrow}$ comprend deux nappes : $\mathcal{L}_0$ composante connexe de l'identité de $\mathcal{L}$ et son translaté par les symétries d'espace. $\mathcal{L}_0$ est un groupe de Lie simple, réel, sans centre, non compact, de dimension 6. Son revêtement universel $\overline{\mathcal{L}}_0$ est isomorphe à SL (2,C), le groupe des matrices 2 par 2 sur le corps des complexes et de déterminant = 1. Le centre de $\overline{\mathcal{L}}_0$ a deux éléments : $\overline{\mathcal{L}}_0/Z_2 = \mathcal{L}_0$.

Les homothéties dans $\mathcal{E}$ de centre x, de rapport positif λ forment un groupe isomorphe à $\mathcal{R}_+^{\otimes}$ (le groupe multiplicatif des réels positifs) ; elles commutent avec les transformations du groupe de Lorentz laissant x fixe et il est utile de considérer les produits directs.

L'action sur l'espace-temps du groupe $\mathcal{L} \times \mathcal{R}_+^{\otimes}$ laissant fixe x se décompose en quatre orbites : x lui-même, Γ_x, $\partial\Gamma_x = \Pi_x^- \cup \partial\Gamma_x^-$ et $\mathcal{E} - \overline{\Gamma}_x$, l'ensemble des points de genre espace par rapport à x.

Soit $\mathcal{T}$ le groupe des translations de $\mathcal{E}$. Le groupe de Lorentz inhomogène est appelé groupe de Poincaré par les physiciens [1]. C'est le produit semi-direct $\mathcal{P} = \mathcal{T} \wedge \mathcal{L}$. Nous considérerons aussi les sous-groupes orthochrone $\mathcal{P}^{\uparrow} = \mathcal{T} \wedge \mathcal{L}$ et connexe $\mathcal{P}_0 = \mathcal{T} \wedge \mathcal{L}_0$, ainsi que le recouvrement $\overline{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{T} \wedge \overline{\mathcal{L}}_0$ de $\mathcal{P}_0$. Enfin, avec les dilatations (homothéties positives) on peut former les groupes $\mathcal{D} = \mathcal{T} \wedge (\mathcal{L} \times \mathcal{R}_+^{\otimes}) = \mathcal{P} \wedge \mathcal{R}_+^{\otimes}$, et respectivement $\mathcal{D}^{\uparrow}$ et $\mathcal{D}_0$.

E.C. Zeeman a donné une caractérisation remarquable de ces groupes. La relation $y \in \Gamma_x^+$ (y dans le futur de x) est une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{E}$ qu'on appelle la relation de causalité. Une permutation f de $\mathcal{E}$ (= une application biunivoque de $\mathcal{E}$ sur lui-même) préserve la causalité si $y \in \Gamma_x^+ \Longrightarrow f(y) \in \Gamma_{f(x)}^+$. Zeemann [2] a montré que les permutations de $\mathcal{E}$ qui, ainsi que leur inverse, préservent la causalité, forment le groupe $\mathcal{D}^{\uparrow}$. Nous reviendrons que l'importance de ce théorème pour les théories relativistes. Notons que la notion de continuité, ni celle de linéarité, n'interviennent [3, 4]. Dans le même ordre d'idée, on peut établir que tous les automorphismes de Poincaré sont continus [5. 6], et plus précisément :

$$\mathrm{Aut}\,\mathcal{P} = \mathrm{Aut}\,\mathcal{P}^{\uparrow} = \mathrm{Aut}\,\mathcal{P}_0 = \mathcal{D}.$$

Une *théorie physique est relativiste* si son groupe d'automorphisme $\mathcal{G}$ contient le groupe $\mathcal{P}_0$. Nous savons depuis la découverte de la non-conservation de la parité que $\mathcal{G}$ ne contient pas $\mathcal{P}^{\uparrow}$, pour les interactions faibles. Les transformations de Poincaré renversant le temps doivent être réinterprétées physiquement comme renversement du mouvement, une telle transformation pouvant toujours être réalisée sur un système physique (transformation "active" au sens de Wigner [7]. Cela n'est pas le cas pour les symétries d'espace, (lorsque le système contient des neutrions), ni pour les dilatations l'invariance "passive" pour les dilatations est simplement de l'analyse dimensionnelle).

La première fois que fut caractérisée toute une famille de représentations linéaires, unitaires, continues, irréductibles d'un groupe de Lie non abélien, non compact, ce fut par E. Wigner [8], pour le groupe de Poincaré (représentations de masse réelle). Complété par les travaux de Gelfand et Naimark [9] et de Bargmann [10], celui de Wigner caractérise toutes les représentations continues unitaires et même projectives de $\mathcal{P}_0$. Dans d'autres exposés aujourd'hui, G. Fuchs et P. Renouard vous parleront des "distri-butions caractères" de $\mathcal{P}_0$ et Rideau de la "formule de Plancherel" pour $\mathcal{P}_0$.

DISCUSSION

Intervention du Prof. GREENBERG.– I would like Lo as K you a question about the classification of représentations of the group D. Don't you assume the representations to be of the same kind as tose of POINCARE group.

Intervention du Prof. MICHEL.– The POINCARE group is an invariant subgroup of D ; and you can pass from representations of an invariant subgroup, ou representations of the quotient to representations of the full group. (Cf. Mackey Acta Mathematica).