LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. TOME 12, OCTOBRE 1951, PAGE 793.

THÉORÈME SUR LES INVARIANTS FORMÉS DE QUATRE FONCTIONS D'ONDE DE DIRAC. APPLICATION : SECTION EFFICACE DE DIFFUSION NUCLÉON-NUCLÉON

Par Louis MICHEL [1].

Sommaire. — Il est bien connu qu'avec quatre fonctions d'ondes ψ de Dirac, prises dans un ordre déterminé, on peut former cinq scalaires linéairement indépendants; on peut aussi former huit vecteurs, neuf tenseurs antisymétriques de rang deux, huit pseudo-vecteurs et cinq pseudo-scalaires. En permutant les fonctions ψ d'un de ces invariants, on obtient un nouvel invariant qui est une combinaison linéaire des anciens (de même nature). Ce théorème peut être très utile pour effectuer des calculs, par exemple : tous les éléments de la matrice S d'un phénomène où n'interviennent que quatre fermions réels contiennent linéairement les invariants considérés et les forces d'échange réalisent des permutations des ψ; la section efficace de diffusion nucléon-nucléon est calculée à titre d'exemple. Le théorème est étendu aux 35 scalaires et 35 pseudo-scalaires formés avec six fonctions ψ distinctes.

1. Invariants que l'on peut former avec deux fonctions d'onde de Dirac [2].

1.1. **Notations.** — Les coordonnées sont x_1, x_2, x_3, $x_4 = ct$ réel, $c = \hbar = 1$; Σ est généralement omis sur les indices muets; les indices spinoriels sont généralement sous-entendus; la forme quadratique fondamentale est

$$g^{ij} = \eta_i \delta_{ij}, \qquad \text{avec} \quad \eta_i = 1 - \delta_{i4} \tag{1}$$

(c'est-à-dire $\eta_i = 1, 1, 1, -1$).

On se limite aux transformations de Lorentz ne changeant pas le sens du temps; elles forment un groupe isomorphe à celui des transformations orthogonales (de déterminant ± 1) d'un espace euclidien.

Dans la transformation

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{2}$$

les composantes covariantes d'un vecteur se transformant ainsi :

$$V'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu}, \tag{3}$$

les composantes contravariantes se transforment ainsi :

$$V_{\nu} = a^{\mu}{}_{\nu} V'_{\mu}, \tag{4}$$

on a

$$V^{\mu} = \eta_{\mu} V_{\mu}, \qquad V_{\mu} = \eta_{\mu} V^{\mu}, \tag{5}$$

les quatre matrices γ^{μ} sont définies par

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \equiv [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{6}$$

On peut écrire l'équation de Dirac d'un champs de fermions sans interactions

$$(-i\chi_{\mu}\gamma^{\mu}\Box_{\mu} + \varkappa)\psi = 0, \tag{7}$$

en posant

$$\Box_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad \varkappa = \text{masse au repos}, \tag{8}$$

les symboles utilisés pour les matrices sont : *, imaginaire conjugué; $^{+}$, hermitique; $\tilde{}$, transposé,

ψ a un indice spinoriel, donc quatre composantes, aussi il est tentant de le considérer comme une matrice à quatre lignes et une colonne. Cependant, cela est à déconseiller, car on ne peut appliquer à ces matrices ψ les règles ordinaires du calcul matriciel qui est établi pour des matrices dont les éléments sont des nombres complexes c; ici les éléments des ψ sont des produits de nombres c (qui peuvent être considérés comme matrice à une ligne, une colonne) et de nombres q (éléments d'un anneau non commutatif et représentable par des matrices). Donc, on définira

$$\psi^{*} \equiv \psi^{+} = c^{*} q^{+} \equiv c^{+} q \equiv q^{+} c^{+}.$$

On pose

$$\psi^{\kappa} = \psi \quad \text{si} \quad \kappa = -1, \qquad = \psi^{*} \quad \text{si} \quad \kappa = +1. \tag{9}$$

On écrit

$$\begin{aligned} F\psi &= F_{\mu\nu}\psi_{\nu} = \psi_{\nu} F_{\mu\nu}, \\ \psi F &= F_{\mu\nu}\psi_{\nu} = \psi_{\mu} F_{\mu\nu}, \end{aligned} \qquad \text{donc} \quad \psi F = \tilde{F}\psi. \tag{10}$$

1.2. **Les cinq invariants.** — Pauli a étudié la variance des ψ pour les transformations de Lorentz (2) [*voir* Pauli (1936), corrigé par Racah (1937) et aussi Pauli (1941)]. Il a démontré que pour de telles transformations on a

$$\psi' = \Lambda\psi \tag{11}$$

Λ étant une matrice régulière satisfaisant à

$$\Lambda^{-1}\chi_{\mu}\gamma^{\mu}\Lambda = a^{\mu}{}_{\nu}\chi_{\nu}\gamma^{\mu} \qquad (\text{dét. } \Lambda = 1), \tag{12}$$

Sans restreindre le formalisme, il est très intéressant de prendre une représentation particulière des matrices γ qui simplifie beaucoup l'écriture. Cette représentation, proposée par Majorana (1937) est définie par

$$\gamma^{\mu+} = \gamma^{\mu} = \eta_{\mu}\gamma^{\mu*} = \eta_{\mu}\tilde{\gamma}^{\mu}. \tag{13}$$

Aussi, grâce à la convention d'écriture (9), en partant des propriétés suivantes :

(1) Du Laboratoire Central des Poudres, en stage à l'Université de Manchester.

(2) Tous les résultats de ce paragraphe sont connus. Ils sont rassemblés ici afin de préciser les notations, ce qui est nécessaire pour utiliser les paragraphes 2 et 3.

ψ^{κ} est solution de l'équation de Dirac (7) et se transforme suivant

$$\psi'^{\kappa} = \Lambda\psi^{\kappa}, \tag{14}$$

$\bar{\psi}^{\kappa} = \psi^{\kappa}\gamma^{4}$ est solution de l'équation adjointe de (7) et se transforme suivant

$$\bar{\psi}'^{\kappa} = \bar{\psi}^{\kappa}\Lambda^{-1};$$

on déduit immédiatement (³) que les expressions

$$X^{Q} = \chi_{Q}\bar{\psi}_{1}{}^{\kappa_1}\gamma^{Q}\psi_{2}{}^{\kappa_2}, \tag{15}$$

construites à partir de deux fonctions d'onde de Dirac sont *des tenseurs complètement antisymétriques d'ordre Q* ou encore « des éléments d'algèbre extérieure d'ordre Q » ($Q = 0$ scalaire, $Q = 1$ vecteur), χ_{Q} et γ^{Q} étant des notations abrégées pour $\chi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ et $\gamma(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ avec Q indices et définis ainsi $\gamma_{0} = 1$, $\chi_{0} = 1$

$$\gamma^{(\lambda, \mu, \nu, \ldots)} = \gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}_{\ldots},$$

si les indices λ, μ, ν, ... sont tous différents

$$\gamma^{(\lambda, \mu, \nu, \ldots)} = 0$$

dans le cas contraire,

les χ_{μ} sont des racines 4^{e} de l'unité définies au signe près par

$$(\chi_{Q}\gamma^{4}\gamma^{Q})^{+} = \chi_{Q}\gamma^{4}\gamma^{Q} \tag{16}$$

(convention généralement adoptée par tous les auteurs).

Ici, leur signe sera choisi ainsi (toutes les formules de la 3^{e} partie sont indépendantes de ce choix) :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour } Q = 0, & \chi_{0} & = 1; \\ \text{» } Q = 1, & \chi_{\lambda} & = i, i, i, 1 \\ & & \text{[même définition qu'en (8)];} \\ \text{» } Q = 2, & \chi_{\mu\nu} & = i\chi_{\mu}\chi_{\nu}; \\ \text{» } Q = 3, & \chi_{\mu\nu\rho} & = i\chi_{\mu}\chi_{\nu}\chi_{\rho} = -\dfrac{1}{\chi^{\lambda}} = -\eta_{\lambda}\chi_{\lambda} \\ & & (\lambda, \mu, \nu, \rho \text{ tous différents}); \\ \text{» } Q = 4, & \chi_{\lambda\mu\nu\rho} & = -\chi_{\lambda}\chi_{\mu}\chi_{\nu}\chi_{\rho} = i. \end{array}\right\} \tag{17}$$

On définit η_{Q} tel que

$$\left.\begin{array}{l} \eta_{0} = 1, \quad \eta_{\lambda} = 1 - 2\delta_{4\lambda} \quad (\text{comme en } 1), \\ \eta_{\lambda, \mu, \ldots} = \eta_{\lambda}\eta_{\mu}, \ldots, \end{array}\right\} \tag{18}$$

on a [*voir* (1) et (6)]

$$\eta_{\lambda}\chi_{\lambda}^{2} = -1 \quad (\text{sans sommation}), \tag{19}$$

indépendant de λ et de (17) et (18), on déduit immédiatement

$$\eta_{Q}\chi_{Q}^{2} = -\theta_{Q} \quad (\text{indépendant des indices } \lambda, \mu, \ldots) \tag{20}$$

avec

$$\left.\begin{array}{llllll} \theta_{Q} = & -1, & 1, & 1, & -1, & -1 \\ \text{pour } Q = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \end{array}\right\} \tag{21}$$

On désignera dans la suite les cinq X^{Q} séparément par

$$S, \quad V^{\lambda}, \quad X^{\lambda\mu}, \quad Y^{\lambda\mu\nu}, \quad Z^{\lambda\mu\nu\rho}.$$

1.3. **La conjugaison de charge** (⁴). — De (13), grâce à (16) et (18), on a

$$\gamma^{Q*} = \gamma_{Q}\eta_{Q} \tag{22}$$

et notant que $\left(\chi_{Q}^{*} = \dfrac{1}{\chi_{Q}}\right)$

$$(\chi_{Q}\gamma^{Q})^{*} = -\theta_{Q}\chi_{Q}\gamma^{Q}. \tag{23}$$

Les équations (6) et (1) donnent encore

$$\gamma^{\mu}\gamma^{4} = \eta_{\mu}\gamma^{4}\gamma^{\mu}. \tag{24}$$

qui, grâce à (18), s'étend à

$$\gamma^{Q}\gamma^{4} = \eta_{Q}\gamma^{4}\gamma^{Q}. \tag{25}$$

La variance de ψ est indépendante de l'interaction de ψ avec d'autres champs, et tous les résultats de 1.2 sont encore valables pour un champ ψ en interaction avec des champs de bosons représentés, eux ou leurs dérivées, par la fonction Φ^{Q} réelle et dont la variance est celle d'un tenseur complètement antisymétrique d'ordre Q [par exemple, Kemmer (1937)].

Soit f_{Q} la constante de couplage (« la charge » du fermion) entre ψ et Φ^{Q}; ψ est maintenant solution de

$$(-i\chi_{\mu}\gamma^{\mu}\Box_{\mu} + \varkappa + f_{Q}\Phi^{Q}\gamma^{Q})\psi = 0, \tag{26}$$

qui peut se transformer, grâce à (16), en

$$\psi^{*}\gamma^{4}\left(i\chi_{\mu}\gamma^{\mu}\overleftarrow{\Box}_{\mu} + \varkappa + f_{Q}^{*}\Phi^{Q}\chi_{Q}\gamma^{Q}\right) = 0 \tag{27}$$

($\overleftarrow{\Box}_{\mu}$ au lieu de $\Box_{\mu}$ pour rappeler que cet opérateur s'applique à gauche à ψ). On voit donc qu'avec

$$f_{Q}^{*} = f_{Q} \quad (\text{si les charges sont réelles}), \tag{28}$$

$\psi^{*}\gamma^{4}$ est encore, comme en 1.2, équation (14), solution de l'équation adjointe de Dirac.

Mais, par contre, en prenant l'imaginaire conjuguée de (26) on a, grâce à (23),

$$(-i\chi_{\mu}\gamma^{\mu}\Box_{\mu} + \varkappa - \theta_{Q}f_{Q}\Phi^{Q}\chi_{Q}\gamma^{Q})\psi^{*} = 0, \tag{29}$$

ψ^{*} n'est pas solution de la même équation que ψ car f_{Q} a été changé en $-\theta_{Q}f_{Q}$.

Dans le cas d'un couplage vectoriel ($Q = 1$) ou « tensoriel » (⁵) ($Q = 2$), la charge change de signe par conjugaison. On dit que *la particule a deux états de charge conjugués*, pour le couplage en question, et l'on peut montrer qu'il y a conservation de la charge.

Dans le cas des trois autres couplages, la charge n'est pas changée de signe, et l'on constate qu'il n'y a plus conservation de la charge.

(³) Par exemple

$$\bar{\psi}'\chi_{\lambda}\chi_{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\psi' = \bar{\psi}\Lambda^{-1}\chi_{\lambda}\gamma^{\lambda}\Lambda\Lambda^{-1}\chi_{\mu}\gamma^{\mu}\Lambda\psi = a^{\lambda}{}_{\nu}a^{\mu}{}_{\sigma}\chi_{\nu}\chi_{\sigma}\bar{\psi}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\psi,$$

grâce à (12).

(⁴) *Voir* Kramers, 1937 et Majorana, 1937.

(⁵) Les physiciens ont l'habitude d'appeler simplement « tensoriel » le couplage pour $Q = 2$.

Si ψ est réel (cela n'est possible qu'avec la représentation de Majorana pour les matrices γ), on appellera particule de Majorana — (du nom dn premier auteur qui l'ait considéré : Majorana (1937) — la particule correspondante.

Dans (26) $-i\chi_\mu\gamma^\mu\,\Box_\mu$ et $\varkappa$ sont réels; si ψ est réel, les $\chi_Q\gamma^Q$ doivent l'être aussi; or, il n'en est pas ainsi pour $Q = 1$, $Q = 2$. Donc : *Une particule de Majorana ne peut être couplée aux champs de bosons qu'avec des couplages* $f_Q = 0$, 3 ou 4. *Elle n'a aucune propriété électromagnétique* (les seuls couplages entre fermions et photons étant la charge électrique ($Q=1$) et le moment magnétique anormal ($Q = 2$).

1.4. **Tenseurs polaires** (6). — Soit :

$$\theta_{\lambda\mu\nu\rho} = 0, \tag{30}$$

si les indices λ, μ, ν, ρ ne sont pas tous différents;

$$\theta_{\lambda\mu\nu\rho} = 1$$

si λ, μ, ν, ρ est une permutation paire de 1, 2, 3, 4;

$$\theta_{\lambda\mu\nu\rho} = -1,$$

si λ, μ, ν, ρ est une permutation impaire de 1, 2, 3, 4.

En posant

$$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \tag{31}$$

on a

$$\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = \theta_{\lambda\mu\nu\rho} \quad (\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \rho \text{ tous différents}) \tag{32}$$

ou bien

$$\gamma^5 = \frac{1}{4!}\theta_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho. \tag{33}$$

On définit

$$\theta^\lambda{}_{\mu\nu\rho} = \eta_\lambda\theta_{\lambda\mu\nu\rho}\ldots \quad \text{et donc} \quad \theta^{\lambda\mu\sigma\rho} = -\theta_{\lambda\mu\nu\rho}. \tag{34}$$

A partir des tenseurs $Y^{\mu\nu\rho}$ et $Z^{\lambda\mu\nu\rho}$, on définit donc :

un pseudo-vecteur

$$A^\lambda = \frac{1}{3!}\theta^\lambda{}_{\mu\nu\rho}Y^{\mu\nu\rho}, \tag{35}$$

un pseudoscalaire :

$$P = \frac{1}{4!}\theta_{\lambda\mu\nu\rho}Z^{\lambda\mu\nu\rho}. \tag{36}$$

Parce qu'on a éliminé de la définition le facteur (dét. $g_{\mu\nu})^{\frac{1}{2}}$, il faut le signe $-$(dét. $g_{\mu\nu} = -1$) dans les formules réciproques.

$$Z^{\lambda\mu\nu\rho} = -P\theta^{\lambda\mu\nu\rho}, \tag{37}$$

$$Y^{\mu\nu\rho} = -A^\lambda\theta_\lambda{}^{\mu\nu\rho}. \tag{38}$$

On peut définir de même le tenseur M polaire de $X^{\nu\rho}$

$$M^{\lambda\mu} = \frac{1}{2!}\theta^{\lambda\mu}{}_{\nu\rho}X^{\nu\rho}, \qquad X^{\nu\mu} = -\frac{1}{2}M^{\lambda\mu}\theta_{\lambda\mu}{}^{\nu\rho}. \tag{39}$$

(6) Parce que la réalité des expressions a une importance en physique, la définition utilisée ici pour le tenseur polaire d'un tenseur diffère par un facteur i de celle habituellement adoptée par les mathématiciens.

Et l'on obtient les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} Y'^{\mu\nu\rho}Y''_{\mu\nu\rho} = Y'\ldots Y'' = -6A'^\lambda A''_\lambda = -6A'.A'', \\ Z'\ldots.Z'' = -24P'P'', \qquad X'..X'' = -M'..M''; \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$X'..Y'' = 2M'.A'', \qquad Y'..X'' = -2A'.M''; \tag{40'}$$

$$X'..Z'' = -2M'P''. \tag{40''}$$

Les physiciens ont aussi l'habitude de n'utiliser que les composantes strictes (les six composantes indépendantes) du tenseur $Q = 2$. Les définitions. généralement adoptées, sont :

$$\left.\begin{aligned} T^1 = X^{23}, \qquad T^2 = X^{31}, \qquad T^3 = X^{12}, \\ T^4 = X^{14}, \qquad T^5 = X^{29}, \qquad T^6 = X^{34}, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

et le « produit scalaire » utilisé est

$$T'.T'' = \sum_{i=1}^{3}T'^iT''^i - \sum_{i=4}^{6}T'^iT''^i = \frac{1}{2}X'..X''. \tag{42}$$

Les cinq invariants S, V, T, A, P ont en tout 16 composantes dont la définition est rappelée ci-dessous [*voir* Michel (1950)].

Partant des 16 matrices $\gamma_A = \gamma_{(Q,\mu)}$ définies ainsi :

Notation.	$a=1$.	$a=2$.	$a=3$.	$a=4$.	$a=5$.	$a=6$.
$Q=0$	1	–	–	–	–	–
$Q=1$	γ^1	γ^2	γ^3	γ^4	–	–
$Q=2$	$i\gamma^2\gamma^3$	$i\gamma^3\gamma^1$	$i\gamma^1\gamma^2$	$i\gamma^1\gamma^4$	$i\gamma^2\gamma^4$	$i\gamma^3\gamma^4$
$Q=3$	$i\gamma^2\gamma^3\gamma^4$	$i\gamma^3\gamma^1\gamma^4$	$i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	$-i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	–	–
$Q=4$	$\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$	–	–	–	–	–

(43)

On a grâce à (6) et à l'hermiticité des γ^μ

$$\gamma_A^+ = \gamma_A, \qquad \gamma_A^2 = 1. \tag{44}$$

Les cinq invariants sont

$$(Q = 0 \text{ à } 4), \qquad X^Q = \psi_1^{\kappa_1}F_{Q,a}\psi_2^{\kappa_2},$$

avec

$$F_{Qa} = \varepsilon_a\gamma^a\gamma_{Q,a}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{Qa} = 1;\ \ i,\ i,\ i,\ 1;\ \ -1,\ -1,\ -1,\ i,\ i,\ i; \\ -1,\ -1,\ -1,\ i;\ i, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

F_{Qa} a les propriétés suivantes :

$$F_{Qa}^+ = F_{Qa}, \qquad \widetilde{F}_{Qa} = \theta_Q F_{Qa} \tag{47}$$

θ_Q est défini en (21).

Si l'on n'utilise pas la représentation de Majorana, mais en se restreignant cependant à des γ^μ hermitiques, il faut utiliser une matrice C définie par

$$\gamma^{\mu *} = \eta_\mu C\gamma^\mu C^{-1}, \tag{48}$$

avec les propriétés

$$\widetilde{C} = C, \qquad CC^+ = 1. \tag{49}$$

Les cinq invariants sont alors $\psi_1^{\kappa_1}\mathcal{F}_{Qa}(\kappa_1,\kappa_2)\psi_2^{\kappa_2}$, avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{Qa}(\kappa_1,\kappa_2) &= F_{Qa} && \text{si} \quad \kappa_1 = +1 \quad \text{et} \quad \kappa_2 = -1, \\ &= \widetilde{C}F_{Qa}C^{-1} && \text{si} \quad \kappa_1 = -1 \quad \text{et} \quad \kappa_2 = +1, \\ &= F_{Qa}C^{-1} && \text{si} \quad \kappa_1 = +1 \quad \text{et} \quad \kappa_2 = +1, \\ &= \widetilde{C}F_{Qa} && \text{si} \quad \kappa_1 = -1 \quad \text{et} \quad \kappa_2 = -1. \end{aligned}$$

Le Tableau I donne les F_{Qa} en notation α, β ou ρ, σ Ces matrices sont reliées aux γ par les relations ($k = 1$ à 3)

$$\alpha_k = i\gamma^4\gamma^k, \qquad \beta = \gamma^4 \tag{51}$$

et réciproquement

$$\left.\begin{array}{l} \gamma^k = -i\beta\alpha_k; \\ \sigma_h = -i\alpha_i\alpha_j \\ (i,\ j,\ k = \text{permutation circulaire de } 1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \tag{52}$$

$$\rho_1 = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \qquad \rho_2 = -\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \qquad \beta_3 = \beta,$$

réciproquement

$$\alpha_k = \rho_1\sigma_k;$$

On peut encore en donner une définition indépendante [7]

$$\left.\begin{array}{c} [\rho_i,\ \rho_j]_+ = 2\delta_{ij} = [\sigma_i,\ \sigma_j]_+, \qquad [\rho_i,\ \sigma_j]_- = 0 \\ \sigma_i\sigma_j = i\sigma_k, \qquad \rho_i\rho_j = i\rho_k \\ (i,\ j,\ k = \text{permutation circulaire de } 1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \tag{54}$$

Notation.	$\alpha\beta$						$\rho\sigma$	
	$a = 1$.	$a = 2$.	$a = 3$.	$a = 4$.	$a = 5$.	$a = 6$.	$a = 1$ à 3.	$a = 4$ à 6.
$Q = 0$..........	β	–	–	–	–	–	ρ_3	–
$Q = 1$..........	α_1	α_2	α_3	1	–	–	$\rho_1\sigma_k$	1
$Q = 2$..........	$-i\beta\alpha_2\alpha_3$	$-i\beta\alpha_3\alpha_1$	$-i\beta\alpha_1\alpha_2$	$-i\beta\alpha_1$	$-i\beta\alpha_2$	$-i\beta\alpha_3$	$\rho_3\sigma_k$	$\rho_2\sigma_k$
$Q = 3$..........	$-i\alpha_2\alpha_3$	$-i\alpha_3\alpha_1$	$-i\alpha_1\alpha_2$	$-i\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	–	–	σ_k	ρ_1
$Q = 4$..........	$-\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3$	–	–			–	ρ_2	–

Ce tableau est indépendant de la représentation choisie pour les matrices. En choisissant les représentations habituelles des ρ, σ [proposées par Dirac (1947), p. 256] on peut prendre $C = \rho_2\sigma_2$. Mais, dans tous les problèmes traités de façon covariante (où l'on n'a pas besoin par exemple de séparer petites et grandes composantes), on a avantage, pour simplifier l'écriture, à prendre la représentation de Majorana pour les matrices, sans avoir besoin évidemment de l'expliciter.

1.5. **Symétrie et antisymétrie des invariants.** — Il est toujours possible de faire *anticommuter* toutes les fonctions ψ que l'on utilise [*voir* par exemple Michel (1950)] en excluant l'absorption suivie de l'émission, ou *vice versa*, de la même particule dans le même état. On voit alors, grâce à (47) qu'en permutant $\psi_1^{\kappa_1}$ et $\psi_2^{\kappa_2}$ les cinq invariants se transforment suivant la loi

$$I^Q(1,\ 2) = -\theta_Q\, I^Q(2,\ 1). \tag{55}$$

2. Invariants, éléments d'algèbre extérieure formés avec quatre fonctions d'onde de Dirac.

2.1. **Énoncé du théorème.** — On trouve facilement tous les éléments d'algèbre extérieure, ${}^4E_R$ d'ordre R que l'on peut former avec deux éléments d'algèbre extérieure, ${}^2E_Q$ et ${}^2E_{Q'}$ d'ordre Q et Q', en utilisant pour cela le produit extérieur et le produit scalaire.

Si les ${}^2E_Q$ sont des invariants formés de deux fonctions d'ondes de Dirac (ils ont été étudiés au paragraphe 1) les ${}^4E_R$ sont formés de quatre fonctions de Dirac $\psi_i^{\kappa_i}$ ($i = 1$ à 4) (distinctes ou non) et ils sont d'ordre R avec $0 \leqq R \leqq 4$.

Avec quatre fonctions $\psi_i^{\kappa_i}$ données, un ${}^4E_R$ est fonction de l'ordre suivant lequel ont été prises les fonctions $\psi_j^{\kappa_j}$ pour le former. On notera ${}^4E_R(P)$, P étant une permutation quelconque de 1, 2, 3, 4. Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Tout ${}^4E_R(P')$ est une combinaison linéaire des ${}^4E_R(P)$: P et P' étant deux permutations aribtraires de* 1, 2, 3, 4.

Ce théorème est vrai pour les ${}^2E_R$ (*voir* 1.5); *voir* l'Appendice pour les $2n\,E_R$ (n entier).

En posant $P' = PP_0$ et en affectant les ${}^4E_R$ d'un nouvel indice pour les classer entre eux, le théorème s'écrit

$${}^4E_{R,i}(PP_0) = (-1)^p C_{ij}^P(R)\, {}^4E_{R,j} \tag{56}$$

$(-1)^p = \pm 1$ suivant que la permutation P est paire ou impaire. Ce facteur est pour tenir compte de l'anticommutation des ψ (*voir* 1.5). Si l'on utilise des ψ qui commutent (on peut ne pas utiliser le formalisme de seconde quantification si l'on n'a pas de particules de Majorana et si $\kappa_1 = -\kappa_2 = \kappa_3 = -\kappa_4$), il suffit de supprimer le signe de (55) et le facteur $(-1)^p$ dans toute la suite.

2.2. **Le groupe $\mathfrak{S}$ des permutations de quatre objets.** — On définit les permutations [même notation que Michel (1950)]

$$P_0 \equiv 1\langle 1,\ 2,\ 3,\ 4\rangle,$$
$$P_1 = \langle 3,\ 4,\ 1,\ 2\rangle, \qquad P_2 = \langle 4,\ 3,\ 2,\ 1\rangle,$$
$$P_3 = \langle 2,\ 1,\ 3,\ 4\rangle, \qquad P_4 = \langle 1,\ 4,\ 3,\ 2\rangle.$$

On a

$$(P = 0 \text{ à } 4), \qquad P_r^2 = 1, \tag{57}$$

P_0, P_1, P_2 paires, P_3, P_4 impaires et

$$P_2 = (P_1P_3)^2. \tag{58}$$

Il est bien connu que toute permutation P de $\mathfrak{S}_4$

[7] Dans Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, un changement de signe dans la définition de σ_2 par rapport à celle généralement adoptée, donne la relation $\sigma_i\sigma_j = -i\sigma_j$.

peut s'exprimer comme produit formé à partir de deux permutations convenablement choisies : par exemple

$$P_3 \quad \text{et} \quad \pi = \langle 4,\ 1,\ 2,\ 3\rangle, \qquad \text{avec} \quad \pi^2 = P_1.$$

Cependant il est plus commode de prendre ici, comme base, les permutations P_1, P_3, P_4 : en effet, en utilisant de plus (57) et (58), toutes les permutations de $\mathfrak{S}_4$ sont données, grâce à la solubilité du groupe $\mathfrak{S}_4$ par des termes du produit

$$(1+P_3)(1+P_4P_3+P_3P_4)(1+P_2)(1+P_1).$$

Les C^P_{ij} de (56) peuvent être considérés comme des matrices d'indice i, j et ces matrices (pour une valeur donnée de R) *forment une représentation du groupe* $\mathfrak{S}_4$, car (56) permet facilement de montrer que si

$$P = P_a P_b \ldots P_r, \tag{60}$$

on a

$$C^P_{ij}(R) = C^{P_a}_{ik}(R)\, C^{bP}_{kl}(R) \ldots C^{P_r}_{nj}(R). \tag{60}$$

Il suffit donc de prouver le théorème ([8]) pour les permutations P_1, P_3, P_4, pour qu'il soit vrai pour toute permutation P.

2.3. Démonstration du théorème pour $R = 0$.

— 2.31. Les cinq Invariants ${}^4E_{0\,i}$. — On trouve qu'il n'y a que cinq ${}^4E_{(0)}$ indépendants, qui sont ici définis

$$\left.\begin{array}{llllll} {}^4E_{(0)i} = S'S'', & V'.V'', & T'.T'', & A'.A'', & P'.P'', \\ \text{pour} \quad i = 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{array}\right\} \tag{61}$$

[*voir* (40) et (42)] soit, en explicitant

$$\left.\begin{array}{c} {}^4E_{0,i} = \varepsilon'_{Qa}(\psi^{\kappa_1}_1 F_{Qa}\psi^{\kappa_2}_2)(\psi^{\kappa_3}_3 F_{Qa}\psi^{\kappa_4}_4), \\ \text{avec} \quad i = Q + 1 \end{array}\right\} \tag{62}$$

[*voir* (46)] et

$$\left.\begin{array}{ll} \varepsilon'_{Qa} = +1 & \text{si } a = 1,\ 2,\ 3; \\ \varepsilon'_{Qa} = -1 & \text{si } a = 4,\ 5,\ 6. \end{array}\right\} \tag{63}$$

On constate que [*voir* (46) et (63)]

$$\varepsilon'_{Qa}\,\varepsilon^2_{Qa} = \theta'_Q \qquad (\text{sans sommation sur } a), \tag{64}$$

résultat qui est indépendant de a, avec

$$\begin{array}{llllll} \theta'_Q = 1, & -1, & 1, & 1, & -1; \\ Q = 0, & 1, & 2, & 3, & 4; \\ i = 1, & 2, & 3, & 4, & 5. \end{array}$$

On peut alors écrire [*voir* (46) et (14)]

$${}^4E_{0,i} = \theta'_i(\psi^{\kappa_1}_1 \gamma_{i,a}\psi^{\kappa_2}_2)(\psi^{\kappa_3}_3 \gamma_{i,a}\psi^{\kappa_4}_a) = \theta'_i\,\mathcal{J}_i(1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{65}$$

2.32. Les matrices $C^{P_1}_{ij}(0)$ et $C^{P_3}_{ij}(0)$. — Elles se calculent immédiatement. $C^{P_1}_{ij}(0) = S_{ij}$, car le produit scalaire [*voir* (61)] est commutatif; $C^{P_3}_{ij}(0) = \theta_i S_{ij}$, grâce à (47).

2.33. La matrice $C^{P_4}_{ij}(0)$ ([9]). — Soit (avec A et $B = 1$ à 16) ω_{AB} défini par $\omega_{AB}\gamma_A\gamma_B = \gamma_B\gamma_A$; on a $\omega_{AB} = \omega_{AB}$ et l'on peut noter

$$\omega_{AB} = \omega_{ia,jb} \qquad (i,\ j = 1 \text{ à } 5);$$

on a la propriété remarquable

$$\sum_a \omega_{ia,jb} = \sum_a \omega_{jb,ia} = \omega'_{ij} \tag{69}$$

indépendant de b, avec

$$\omega'_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{70}$$

Pauli (1936) a démontré ([10]) que

$$\sum_{B=1}^{16} \gamma^B_{\sigma\rho}\,\gamma^B_{\bar\rho\bar\sigma} = 4\,\delta_{\rho\bar\rho}\,\delta_{\sigma\bar\sigma}. \tag{71}$$

On en tire

$$\sum_{jb} \gamma^{jb}_{\sigma\rho}\,\gamma^{ia}_{\bar\rho\varkappa}\,\gamma^{jb}_{\varkappa\lambda}\,\gamma^{a}_{\lambda\bar\sigma} = 4\,\delta_{\sigma\lambda}\,\delta_{\rho\varkappa}\,\gamma^{ia}_{\bar\rho\varkappa}\,\gamma^{ia}_{\lambda\bar\sigma},$$

et, grâce à (68) et (43),

$$\sum_{jb} \omega_{ia,jb}\,\gamma^{jb}_{\rho\sigma}\,\gamma^{jb}_{\bar\rho\bar\sigma} = 4\,\gamma^{ia}_{\sigma\bar\sigma}\,\gamma^{ia}_{\rho\bar\rho} \tag{72}$$

en sommant sur a [*voir* (6) et en saturant les indices σ par $\bar\psi^{\kappa_1}_1$, ρ par $\psi^{\kappa_2}_2$, $\bar\rho$ par $\bar\psi^{\kappa_3}_3$, σ par $\psi^{\kappa_4}_4$, [*voir* (65)], on a

$$\sum_j \omega_{ij}\,\mathcal{J}_j(1,\ 2,\ 3,\ 4) = -4\,\mathcal{J}_i(1,\ 4,\ 3,\ 2), \tag{73}$$

ou encore, en multipliant les deux membres par θ'_i ($\theta'^2_i = 1$, $(-1)^{P_4} = -1$),

$$(-1)^{P_4}\sum_\sigma \theta'_i\,\omega_{ij}\,\theta'_j\,{}^4E_j(0) = 4\,{}^4E_i(0)(1,\ 4,\ 3,\ 2), \tag{74}$$

donc

$$C^{P_4}_{ij}(0) = \frac{1}{4}\,\theta'_i\,\omega_{ij}\,\theta'_j \tag{75}$$

(*voir* Tableau II) et le théorème est démontré pour $R = 0$.

2.4. Démonstration pour $R = 4$.

— Il y a cinq ${}^4E_i(4)$ définis ainsi

$$S'P'', \quad V'.A'', \quad \frac{1}{2}T'..M'' = \frac{1}{2}M'..T'', \quad A'.V'', \quad P'S''. \tag{76}$$

([8]) La démonstration de ce théorème part d'une égalité fondamentale donnée par Pauli (1936). Celui-ci a donné trois lignes de $C^{P}_{(0)}$ et deux de $C^{P}_{(4)}$. Fierz (1937) a donné en entier la matrice $C^{P}_{(0)}$.

([9]) *Voir* Fierz (1937).

([10]) La formule (71) est imprimée incorrectement dans le Mémoire de Pauli (des indices ont été permutés).

TABLEAU II.

$C^{P_1}(R)$. — $C^{P_3}(R)$. — $4\,C^{P_5}(R)$.

$$R=0\;\left\{\begin{array}{l} S'S'' \\ V'.V'' \\ \tfrac{1}{2}(V'.X''=T'.T'') \\ A'V'' \\ P'P'' \end{array}\right.
\begin{bmatrix} 1&.&.&.&. \\ .&1&.&.&. \\ .&.&1&.&. \\ .&.&.&1&. \\ .&.&.&.&1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -1&.&.&.&. \\ .&1&.&.&. \\ .&.&1&.&. \\ .&.&.&-1&. \\ .&.&.&.&-1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1&-1&1&1&-1 \\ -4&-2&0&-2&-4 \\ 6&0&-2&0&-6 \\ 4&-2&0&-2&4 \\ -1&-1&-1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$R=1\;\left\{\begin{array}{l} S'V'' \\ V'S'' \\ V'.V'' \\ V'.V'' \\ M'.A'' \\ A'.M'' \\ A'P'' \\ P'V'' \end{array}\right.
\begin{bmatrix} .&1&.&.&.&.&.&. \\ 1&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&-1&.&.&.&. \\ .&.&-1&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&-1&.&. \\ .&.&.&.&-1&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&1 \\ .&.&.&.&.&.&1&. \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -1&.&.&.&.&.&.&. \\ .&1&.&.&.&.&.&. \\ .&.&1&.&.&.&.&. \\ .&.&.&1&.&.&.&. \\ .&.&.&.&1&.&.&. \\ .&.&.&.&.&-1&.&. \\ .&.&.&.&.&.&-1&. \\ .&.&.&.&.&.&.&-1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1&1&-i&-i&1&-1&-i&i \\ 1&1&i&i&1&-1&i&-i \\ 3i&-3i&-1&1&-i&-i&3&3 \\ 3i&-3i&1&-1&-i&-i&-3&-3 \\ 3&3&i&i&-1&1&-3i&3i \\ -3&-3&i&i&1&-1&-3i&3i \\ i&-i&1&-1&i&i&1&1 \\ -i&i&1&-1&-i&-i&1&1 \end{bmatrix}$$

$$R=2\;\left\{\begin{array}{l} S'V'' \\ V'\wedge V'' \\ V'.Y'' \\ A'S'' \\ V_0V \\ M'P'' \\ Y'.A'' \\ A'\wedge A'' \\ P'M'' \end{array}\right.
\begin{bmatrix} .&.&.&1&.&.&.&.&. \\ .&-1&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&1&.&. \\ 1&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&-1&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&.&1 \\ .&.&1&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&-1&. \\ .&.&.&.&.&1&.&.&. \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -1&.&.&.&.&.&.&.&. \\ .&1&.&.&.&.&.&.&. \\ .&.&1&.&.&.&.&.&. \\ .&.&.&1&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&1&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&1&.&.&. \\ .&.&.&.&.&.&-1&.&. \\ .&.&.&.&.&.&.&-1&1 \\ .&.&.&.&.&.&.&.&-1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1&-i&-1&1&-i&-1&-1&i&-1 \\ 2i&0&2i&-2i&0&-2i&-2i&0&+2i \\ -2&-2i&0&-2&0&-2&0&-2i&-2 \\ 1&i&-1&1&i&-1&-1&-i&-1 \\ 4i&0&0&-4i&0&4i&0&0&4i \\ -1&i&-1&-1&-i&1&-1&i&1 \\ -2&2i&0&-2&0&-2&0&2i&-2 \\ -2i&0&2i&2i&0&2i&-2i&0&-2i \\ -1&-i&-1&-1&i&1&-1&i&1 \end{bmatrix}$$

$$R=3\;\left\{\begin{array}{l} S'V'' \\ V'P'' \\ V'.M'' \\ M'.V'' \\ X'.V'' \\ V'.V'' \\ A'.S'' \\ P'V'' \end{array}\right.
\begin{bmatrix} .&.&.&.&.&.&1&. \\ .&.&.&.&.&.&.&1 \\ .&.&.&-1&.&.&.&. \\ .&.&-1&.&.&.&.&. \\ .&.&.&.&.&-1&.&. \\ .&.&.&.&-1&.&.&. \\ 1&.&.&.&.&.&.&. \\ .&1&.&.&.&.&.&. \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -1&.&.&.&.&.&.&. \\ .&1&.&.&.&.&.&. \\ .&.&1&.&.&.&.&. \\ .&.&.&1&.&.&.&. \\ .&.&.&.&1&.&.&. \\ .&.&.&.&.&-1&.&. \\ .&.&.&.&.&.&-1&. \\ .&.&.&.&.&.&.&-1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1&-i&-1&1&-i&-i&1&i \\ i&1&i&i&-1&1&-i&1 \\ -3&-3i&-1&1&i&i&-3&3i \\ 3&-3i&1&-1&i&i&3&3i \\ 3i&-3&-i&-i&-1&1&-3i&-3 \\ 3i&3&-i&-i&1&-1&-3i&3 \\ 1&i&-1&1&i&i&1&-i \\ -i&1&-i&-i&-1&1&i&1 \end{bmatrix}$$

$$R=4\;\left\{\begin{array}{l} S'P'' \\ V'.A'' \\ \tfrac{1}{2}(V'.M'') \\ A'.V'' \\ P'S'' \end{array}\right.
\begin{bmatrix} .&.&.&.&1 \\ .&.&.&1&. \\ .&.&1&.&. \\ .&1&.&.&. \\ 1&.&.&.&. \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -1&.&.&.&. \\ .&+1&.&.&. \\ .&.&1&.&. \\ .&.&.&-1&. \\ .&.&.&.&-1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1&-i&1&i&1 \\ 4i&-2&0&-2&-4i \\ 6&0&-2&0&6 \\ -4i&-2&0&-2&4i \\ 1&i&1&-i&1 \end{bmatrix}$$

D'après cette définition, on obtient immédiatement

$$C^{P_4}(4) \qquad (\textit{voir} \text{ Tableau II}),$$

et en utilisant (47)

$$C^{P_3}(4) = C^{P_3}(0) = \theta_i \delta_{ij} \qquad [\textit{voir} \ (67)].$$

Le calcul de $C^{P_4}(4)$ se déduit ainsi du calcul de $C^{P_4}(0)$; avant de saturer les indices comme on l'a fait pour (72), on transforme cette formule en multipliant l'indice σ par γ^5; on notera $\breve{X}$ l'invariant obtenu en remplaçant γ_Q ou F_Q [*voir* (15) et (45)] par $\gamma_Q \gamma^5$ ou $F_Q \gamma^5$.

On obtient

$$\left.\begin{array}{lll} \breve{S} = -iP, & \breve{P} = iS, & \breve{V} = -A, \\ \breve{A} = -V, & \breve{X} = -iM, & \breve{M} = iX. \end{array}\right\} \qquad (77)$$

Et la relation cherchée peut donc se déduire de (74) en remplaçant les X ayant l'indice σ par $\breve{X}$. d'où $C^{P_4}(4)$ (qui est écrit dans le Tableau II),

2.5. **Démonstration pour** $R = 1$, $R = 3$ et $R = 2$.

— Les huit invariants utilisés sont, pour $R = 1$:

$$^4E_i(1) = \left\{\begin{array}{llll} S'V'', & V'S'', & V'.X'', & X'V.'', \\ M'.A'', & A'.M'', & A'P'' & P'A''. \end{array}\right\} \qquad (78)$$

Pour l'étude de $C^{P_1}(1)$ on note que

$$V'.X'' = -X''.V', \qquad M'.A'' = -A''.M'.$$

Pour l'étude de $C^{P_3}(1)$, on utilise (27).

Pour l'étude de $C^{P_4}(1)$, on part de (72), en multipliant l'indice σ par $\chi_\mu \gamma^\mu$. On obtient ainsi cinq relations, en utilisant (20) si nécessaire. De celles-ci on en déduit cinq autres en tenant compte de la commutation de P_1 et P_4, donc de C^{P_1} et C^{P_4}. L'ensemble de ces dix relations n'en formant que huit indépendantes qui sont :

$$^4E_i(1, P_a P_0) = (-1)^{P_a} C^{P}_{ij}(1)\, {}^4E_j(1, P_0).$$

De la même façon que pour passer de $R = 0$ à $R = 4$, on utilise les relations (77) pour calculer les matrices $C^P(3)$ à partir de $C^P(1)$.

Pour le cas $R = 2$ on rencontre une difficulté nouvelle, Il y a neuf invariants $^4E_i(2)$:

$$S'X'', \quad V'_\Lambda V'', \quad V'.Y''', \quad X'S'',$$
$$X'_0 X'', \quad M'P'', \quad Y'.V'', \quad A'_\Lambda A'', \quad P'M'',$$

Λ indiquant le produit extérieur

$$(V'_\Lambda V'')^{\mu\nu} = V'^{\mu} V''^{\nu} - V'^{\nu} V''^{\mu},$$

o étant une convention pour

$$(X'_0 X'')^{\mu\nu} = X'^{\mu}{}_{\lambda} X''^{\lambda\nu} - X'^{\nu}{}_{\lambda} X''^{\lambda\mu}.$$

$C^{P_1}(2)$ et $C^{P_2}(2)$ se calculent facilement. Pour $C^{P_4}(2)$, on suit la même méthode que pour $R = 1$. On part de (72) et l'on multiplie l'indice σ par $\chi_\mu \chi_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu$ $(\mu \neq \nu)$ on obtient ainsi cinq relations. En utilisant $P_1 P_4 = P_4 P_1$, on a cinq nouvelles relations. Mais comme pour $R = 1$, ces dix relations n'en forment que huit indépendantes, or il y a neuf invariants; cependant, il est possible de former de nouvelles relations; une qui convient [11] est fondée sur l'égalité

$$P_3 P_4 = (P_4 P_3)^2. \qquad (79)$$

Et le théorème se trouve démontré pour les ^4E.

2.6. **Corollaires du théorème.**

— 2.61. EXPRESSIONS LINÉAIRES EN $^4E_i(R)$ INVARIANTES POUR LE GROUPE $\mathcal{S}_4$. — Est-il possible de construire de telles expressions avec quatre champs différents de fermions ($^4\psi_i$ distincts) ? La réponse est affirmative pour $R = 0$ [*voir* Michel (1950)].

Toute expression linéaire $h(R)$ est de la forme [12]

$$h(R) = \sum_{i,P} \mathcal{J}_i(P)\, {}^4E_i(R). \qquad (80)$$

En choisissant un ordre donné pour définir la permutation $P_0 = 1$, on a

$$\left.\begin{array}{l} h(R) = \displaystyle\sum_i g_i\, {}^4E_i(R, P_0), \\ \text{avec} \quad g_i = \displaystyle\sum_{jP} \mathcal{J}_i(P)(-1)^P C^P_{ji}. \end{array}\right\} \qquad (81)$$

Si h est invariant pour tout P, on doit avoir

$$h(R) = \sum_i g_i\, {}^4E_i(R, P_0) = \sum_i g_i (-1)^P C^P_{ij}\, {}^4E_j(R, P_0)$$
$$= \frac{1}{24} \sum_P \sum_i g_i (-1)^P C^P_{ij}\, {}^4E_j(R, P_0).$$

[11] Les deux derniers invariants non séparés $^4E_{2,3}$, $^4E_{2,7}$ satisfont à la relation invariante par P_1 : (en notant ici $^4E_i(2)$ implement E_i)

$$E_3(P_4 P_0) + E_7(P_4 P_0)$$
$$= +E_1(P_0) + E_4(P_0) + E_6(P_0) + E_9(P_0),$$

d'où

$$E_3(P_3 P_4 P_0) - E_7(P_3 P_4 P_0)$$
$$= -E_2(P_3 P_0) + E_4(P_3 P_0) + E_6(P_3 P_0) - E_9(P_3 P_0),$$

et en utilisant une relation déjà trouvée, cela égale

$$-iE_2(P_4 P_3 P_0) + iE_8(P_4 P_3 P_2),$$

d'où, grâce à (79),

$$E_3(P_4 P_3 P_4 P_3 P_0) - E_7(P_4 P_3 P_4 P_3 P_0)$$
$$= -iE_2(P_4 P_3 P_0) + iE_8(P_4 P_3 P_0),$$
$$E_3(P_4 . P_3 P_4 P_3 P_0) - E_7(P_4 . P_3 P_4 P_3 P_0)$$
$$= iE_2(P_3 P_4 P_3 P_0) + i(E_8(P_3 P_4 P_3 P_0),$$

d'où

$$E_3(P_4 P_0) - E_7(P_4 P_0) = iE_2(P_0) + iE_8(P_0),$$

qui, avec la relation dont nous sommes partis, donne

$$E_3(P_4 P_0) \qquad \text{et} \qquad E_7(P_4 P_0).$$

[12] Les h fixés, n'intervenant pas ici, sont omis dans l'écriture.

La condition nécessaire (et suffisante) pour que $h(R) \neq 0$ soit invariant pour toute permutation P est donc que

$$\sum_P (-1)^P g_i C_{ij}^P = 24 g_i, \qquad (82)$$

c'est-à-dire que g_i soit « vecteur propre » de la matrice (qui doit être $\neq 0$)

$$\mathcal{C} = \sum_P (-1)^P \widetilde{C}^P,$$

avec la valeur propre 24.

Pour $R = 0$, on trouve effectivement pour g_i [*voir* Michel (1950)]

$$g_2 = g_3 = 0, \qquad g_2 = -g_4 = g_s. \qquad (83)$$

Cet invariant est le déterminant formé avec les quatre composantes des 4ψ; il a déjà été utilisé par Critchfield et Wigner (1941) [*voir* aussi Critchfield (1943)]. Pour les autres valeurs de R, $\mathcal{C} = 0$ et il n'y a pas de solutions. Il en est de même si l'on cherche une expression antisymétrique par rapport aux ψ (qui anticommutent) [13].

L'expression $h_0 = g_0\,(S'S'' - A'A'' + P'P'')$ est donc la seule indépendante de l'ordre dans lequel sont placés les quatre ψ.

Si des ψ sont identiques, les ${}^{2n}E_R$ sont alors invariants par rapport aux permutations qui les commutent. On en déduit immédiatement, grâce à (55), pour les ${}^2E$ construits avec le même ψ, $V = 0 = X$ (les ψ anticommutant).

2.62. Identités quadratiques entre les ${}^2E(Q)$. — Si les ${}^4E$ sont formés à partir des mêmes ${}^2E(Q)$, (S, V, X, A, P), ils sont invariants pour les permutations P_1, P_4 et leurs produits. [Plus exactement, ils sont multipliés par $(-1)^P$].

L'invariance par rapport à P_1 diminue le nombre des ${}^4E$ indépendants (cela est dû à la commutativité du produit scalaire). Ce nombre se réduit :

pour $R =$	0,	1,	2,	3,	4
à	5,	4,	3,	4,	3

($V \wedge V$, $A \wedge A$, $X_0 X$ étant $= 0$).

L'invariance par rapport à P_4 permet de déduire d'autres relations linéaires entre les ${}^4E_i(R)$, ces relations étant des identités quadratiques entre les ${}^2E(Q)$. [Les cinq relations obtenues pour $R = 0$ et $R = 4$ ont été données par Pauli (1936), celles pour $R = 2$ par Kofink (1937), pour $R = 1$ et $R = 3$ par Kofink (1940)]. Ces relations sont :

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{pour } R = 0 & \left\{\begin{array}{ll} a. & \frac{1}{2} X..X \equiv \frac{1}{2} X^2 \equiv S^2 - P^2, \\ b. & V^2 \equiv -A^2, \\ c. & A^2 \equiv S^2 + P^2; \end{array}\right. \\
\text{»} \quad R = 1 & \left\{\begin{array}{ll} d. & SV \equiv M.A, \\ e. & PA \equiv VX; \end{array}\right. \\
\text{»} \quad R = 2 & \quad f. \; SX + V.Y + MP \equiv 0; \\
\text{»} \quad R = 3 & \left\{\begin{array}{ll} g. & SA \equiv -V.M, \\ h. & PV \equiv -X.A; \end{array}\right. \\
\text{»} \quad R = 4 & \left\{\begin{array}{ll} i. & V.A \equiv 0, \\ j. & X..M \equiv 4SP. \end{array}\right.
\end{array}\right\} \qquad (84)$$

Ces relations ne sont pas toutes indépendantes; on démontre aisément qu'elles peuvent toutes être déduites de b, c, f, i, par exemple [Kofink (1940)].

3. Applications.

3.1. Interaction phénoménologique entre quatre fermions. — La densité d'hamiltonien d'interaction est un scalaire [14]. Cette densité h la plus générale, ne faisant intervenir que les quatre ψ (et non leurs dérivées) est donc, pour une classe donnée $\pm\kappa$ de réactions [15]

$$h = \sum_{i,R} g_{iR}(\kappa)\left({}^4E_{iR}(\kappa) + {}^4E_{iR}(-\kappa)\right), \qquad (85)$$

les g_{iR} réels étant des éléments d'algèbre extérieure d'ordre R.

En se limitant à l'approximation de Born (ondes planes pour représenter les particules), on peut donc déduire l'expression générale proportionnelle à la probabilité de transition $|H_T|^2$, H_T étant l'élément de l'hamiltonien $\int h\,dv$ correspondant à la transition. Celà a été fait dans une publication antérieure [Michel (1950)] dans le cas simple [16]

(13) En d'autres termes, lorsqu'on décompose les représentations $C(R)$ en représentations irréductibles de S_4, on ne trouve qu'une seule fois, et pour $R = 0$, une représentation irréductible de degré 1.

(14) Ce ne peut être un pseudo-scalaire, car la « parité » ne serait pas conservée. Ce ne peut être non plus un scalaire de la forme $S_i = {}^4E(4) \times$ déterminant $a^{\mu\nu}$, $a^{\mu\nu}$ étant [*voir* (2)] la matrice de la transformation de Lorentz, car la valeur de S_i ne pourrait être complètement définie (avec son signe) qu'en faisant intervenir une orientation donnée pour les trièdres d'espace. Or il ne semble pas possible actuellement de définir dans l'univers une telle orientation d'après les phénomènes physiques dus à des interactions entre particules élémentaires.

(15) L'existence d'une réaction (réelle ou virtuelle) entre s champs (décrits par des $\psi_s^{\kappa_s}$) distincts ou non, implique l'existence d'un couplage entre ces champs, ce qui implique l'existence d'autres réactions. L'ensemble de toutes les réactions dont l'existence est impliquée par l'existence de l'une d'entre elles est appelée « classe » [Michel (1950) *a.* et *b*] la classe est définie par $\pm\vec{\kappa}$ avec $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_0)$.

(16) On verra en 3.2 un exemple d'application. Un autre exemple est l'interaction « directe » entre quatre fermions. Dans ce cas, les g_0 sont des constantes de couplage (exemple : radioactivité-β). Mais l'expression la plus générale pour h (densité d'hamiltonien d'interaction) dérivable d'un lagran-

où $R = 0$ et les résultats obtenus sont rappelés ci-dessous

On notera $\text{M}_s = +1$ ou -1 suivant que la s^e particule est émise ou absorbée, $\mathfrak{N}$ le nombre d'états de spin initiaux distincts $\text{N} = 4 \cdot 2^{-\frac{1}{2}\Sigma \text{M}_s}$. Pour une transition permise (initialement les particules avec $\text{M} = -1$ sont présentes, les états des particules avec $\text{M} = +1$ ne sont pas occupés) et désignant par $\sum\limits_{\sigma}$ la somme sur les états distincts par le spin, on a

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\mathfrak{N}} \sum_{\sigma} |H_T|^2 \\ &= \frac{V^{-2}}{\mathfrak{N}} \sum_{ia,jb} g_i g_j \varepsilon'_{ia} \varepsilon'_{ib} \quad \operatorname{Tr} F_{ia} D(\text{M}_1) F_{jb} D(-\text{M}_2) \\ &\qquad \times \operatorname{Tr} F_{ia} D(\text{M}_3) F_{jb} D(-\text{M}_4), \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

avec

$$D(\text{M}_s) = \frac{\gamma^4}{2E_s}\left(\sum_{\mu} \chi_\mu \gamma^\mu k^\mu + \text{M}_s \varkappa_s\right), \tag{87}$$

$\varkappa_s$ étant la masse du repos de la s^e particule, k^μ_s son quadrivecteur impulsion-énergie ($k^4 = -k_4 = E$); on a $k^\mu k_\mu = -\varkappa^2$.

χ_μ a été défini en (8) et F_{ia} en (46).

V est le volume de normalisation des ψ.

La formule (86) est explicitée dans le Tableau III.

L'expression $\frac{1}{V^2} \sum\limits_{\sigma} | H_T | E_1 E_2 E_3 E$ est donnée par le Tableau III, avec

$$m_s = \text{M}_s \varkappa_s.$$

La 1re colonne est le coefficient de g_1^2 dans l'expression (87), la 2e celui de g_2^2, etc. Exemple, le coefficient de g_1^2 est

$$(k_1 . k_2)(k_3 . k_4) + k_1 . k_2\, m_3 m_4 + k_3 . k_1\, m_1 m_2 + m_1 m_2 m_3 m_4 .$$

TABLEAU III.

	g_1^2.	g_2^2.	g_3^2.	g_4^2.	g_5^2.	$g_1 . g_2$.	$g_1 . g_3$.	$g_2 . g_3$.	$g_2 . g_4$.	$g_3 . g_4$.	$g_3 . g_5$.	$g_4 . g_5$.
$(k_1 . k_2)(k_3 . k_4)$	1		—2	–	1	–	–	–	–	–	–	–
$(k_1 . k_3)(k_2 . k_4)$	–	2	4	2	–	–	—2	–	4	–	2	–
$(k_1 . k_4)(k_2 . k_3)$	–	2	4	2	–	–	2	–	—4	–	—2	–
$k_1 . k_2 m_3 m_4 + k_3 . k_4 m_1 m_2$ ..	1	—2	–	2	—1	–	–	–	–	–	–	–
$k_1 . k_3 m_2 m_4 + k_2 . k_4 m_1 m_3$ ..	–	–	–	–	–	2	–	—6	–	—6	–	—2
$k_1 . k_4 m_2 m_3 + k_2 . k_3 m_2 m_4$ ..	–	–	–	–	–	—2	–	—6	–	6	–	—2
$m_1 m_2 m_3 m_4$	1	4	6	4	1	–	–	–	–	–	–	–

3.2. Scattering nucléon-nucléon dans les différentes théories mésiques, couplage en f, à l'approximation du second ordre en f. — 3.21. CAS D'UTILISATION DU TABLEAU III. — Le Tableau III pourra être utilisé dans le cas de diffusion entre deux fermions, si l'élément correspondant de la matrice S a la forme (85) avec $R = 0$. Les g_i sont alors des fonctions des constantes d'interaction et d'invariants relativistes. Dans le cas où l'interaction entre fermions (exemple nucléons) est due à des champs intermédiaires de bosons (exemple : mésons) la méthode de Feynman, exposée par Dyson (1949) pour l'électrodynamique et étendue par Matthews (1949 *a*) pour les différentes théories mésiques, permet très facilement de construire l'élément de la matrice S correspondant à une transition donnée. Soit h_i les densités d'hamiltonien d'interaction entre les différents champs de bosons et les fermions, dans tout élément d'ordre quelconque de la matrice S les quatre fonctions ψ sont reliées entre elles par les matrices γ intervenant en k_i, par des fonctions Δ_F ou leurs dérivées et des fonctions S_F (les dernières correspondant à des fermions virtuels, les précédentes à des bosons virtuels). Seules les fonctions Δ_F n'introduisent pas de quadrivecteurs impulsion-énergie k^μ (au numérateur) lorsque l'on passe dans l'espace des k^μ et dans ce cas l'élément de la matrice S est un invariant scalaire de la forme $\Sigma g_i {}^4E_i(0)$. Or, seuls les éléments du 2e ordre ne font pas intervenir de fonctions S_F. Les opérateurs P de Dyson (1949) agissant sur des fonctions φ de bosons n'introduisent pas de dérivées des fonctions Δ_F que dans le cas des mésons de spin zéro ou pour le photon et [*voir* Matthews (1949 *b*)] le méson vectoriel neutre. Mais dans les autres cas de spin 1 les quadrivecteurs k introduits peuvent être éliminés grâce à certaines relations [17].

Donc, en résumé, en suivant les dénominations de Pais (1947), généralement adoptées, appelant :

f, les constantes d'interactions qui ne contiennent que la fonction f du champ de bosons;

gien, quantifiable et décrivant une interaction directe entre quatre fermions peut contenir des quadrivecteurs impulsion-énergie ou linéairement des dérivées premières des ψ; h peut encore contenir des termes de (85) où $R = 4$, les g_i étant alors des constantes de couplage pseudo-scalaires.

[17] En utilisant les mêmes relations on peut démontrer que pour les couplages « en g » dans le cas des mésons de spin zéro, les k^λ introduits par les dérivées de Δ_F peuvent être éliminés, comme il est bien connu [Nelson (1941), Dyson (1948), Le Couteur et Rosenfeld (1949), Van Hove (1949)], ce qui revient à poser $\frac{2\varkappa}{\mu} g_6 + f_5 = f'_5$, $g_1 = 0$ en négligeant dans ce dernier cas la différence de masse entre protons et neutrons.

g, les constantes d'interactions qui ne contiennent que les dérivées de φ,

on peut dire que les seuls ${}^4E\,(R)$ contenus dans les éléments du second ordre de la matrice S pour l'interaction nucléon-nucléon avec les couplages en f des différentes théories mésiques sont les ${}^4E\,(0)$.

Cette conclusion est encore vraie pour les interactions électromagnétiques entre particules chargées (mais sans moment magnétique anormal, ce dernier introduisant un couplage en g). Les éléments de la matrice S du 2e ordre, pour la diffusion nucléon-nucléon, ou les hamiltoniens du 2e ordre correspondant ont été publiés pour les différentes théories mésiques scalaires, vectorielles et pseudo-scalaires par Van Hove (1949), Jean et Prentki (1950); pseudo-vectorielles par Enatsu (1950).

3.22. Les forces d'échanges. — Les matrices de spin isotopique étant des opérateurs linéaires, les parties 1 et 2 s'étendent immédiatement au cas de ψ contenant des indices de spin isotopique. Pour appliquer le tableau (87) il faut cependant développer par rapport aux fonctions ψ ordinaires. Tous les ${}^4E_i\,(0)$ ne se trouvent plus alors écrits avec la même permutation P, s'il y a échange de particules : c'est le cas d'une interaction proton-neutron par l'intermédiaire de mésons chargés (les matrices τ_1 et τ_2 sont responsables du changement de P). Cela se produit encore (indépendamment du spin isotopique) pour les particules de même nature et avec même κ, soit parce que $L_1 = L_2$: particules expérimentalement indiscernables, soit parce que $L_1 = -L_2$, $M_1 = -M_2$; par exemple, la diffusion positon-négaton, traitée par Bhabha (1937). Comme on le voit dans l'article de Bhabha, en élevant au carré l'élément de transition, puis en sommant sur les spins, on obtient des produits de traces comme en (86), mais aussi de longues traces contenant huit ψ et dont le calcul est plus fastidieux. Cela peut être évité en appliquant le théorème de la 2e partie et ramenant ainsi tous les ${}^4E\,(0)$ à la même permutation.

3.23. La diffusion nucléon-nucléon. — 3.231. *La section efficace de collision.* — Ayant la matrice $R = S - 1$, on a [Møller (1945) et (1946)]

$$\mathrm{d}Q = \frac{4\pi^2(E'^2_2 - \varkappa^2)^{\frac{3}{2}} E_1 E_2 E'_1 E'_2 \,|\,R\,|^2\,\mathrm{d}\Omega}{\left|\frac{1}{2}(k_1 \cdot k_2)^2\right|^{\frac{1}{2}} \,|\,E'_1 \varkappa^2 + E'_2 k'_1 . k'_2\,|}, \qquad (88)$$

$\mathrm{d}\Omega$ étant l'angle solide dans la direction $\vec{k}'_2$.

On désignera les masses μ des mésons et les constantes de couplage f des différentes théories mésiques par deux indices, le premier étant, soit C pour les mésons chargés, S pour les mésons neutres de la théorie symétrique (protons et neutrons ont des charges mésiques opposées), N pour les mésons neutres (protons et neutrons ont même charge mésique); le second indice étant 1 pour les mésons scalaires, 2 pour les mésons vectoriels, 4 pour les mésons pseudo-vectoriels, 5 pour les mésons pseudo-scalaires.

La densité d'hamiltonien d'interaction la plus générale sera donc

$$h = \sum_i f_{Ci}\,\bar{\psi}^* F_i(\tau_1 + \tau_2)\psi + f_{Si}\,\bar{\psi}^* F_i \tau_3 \psi + f_{Ni}\,\bar{\psi}^* F_i \psi. \qquad (89)$$

Tous les mélanges possibles dépendent donc de 12 constantes f et 12 masses μ. Pour une théorie symétrique

$$f_N = 0, \qquad f_S = f_C, \qquad \mu_s = \mu_c.$$

3.232. *La diffusion neutron-neutron.* — Ayant sommé sur la variable d'espace (ce qui assure la conservation de la quantité de mouvement) j'appelle a^{M} la partie spinorielle d'une onde plane de ψ^{κ} représentant une particule donnée (k, σ, M); en effet,

$$\psi^{\kappa} = (NV)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathrm{M}} u^{(\mathrm{M})}{}_{\kappa\mathrm{M}}\, a^{\mathrm{M}}\, \mathrm{e}^{\frac{-i\mathrm{M}k.x}{\hbar}} \qquad (90)$$

[*voir* Michel (1950)], où u est le « nombre q ».

On pose

$$J_i(1', 1, 2', 2) = \sum_b \varepsilon'_b(a_1, F_{ib}\, a_1)(a_2, F_{ib}\, a_2) \qquad (i = 1 \text{ à } 5).$$

et l'on obtient la matrice $R = S - 1$ pour une transition permise

$$\langle k'_1 k'_2 \,|\, R \,|\, k_1 k_2 \rangle = \frac{-i}{4\pi^2 \hbar c} \sum_i [\mathfrak{g}_i J_i(1', 1, 2', 2) - \mathfrak{g}'_i J(2', 1, 1', 2)],$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{g}_i &= \frac{f^2_{S_i}}{(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{S_i}} + \frac{f^2_{N_i}}{(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{N_i}} \quad \text{pour } i = 1, 2, 4, \\
\mathfrak{g}_3 &= 2^2\varkappa^2 \left(\frac{f^2_{S_4}}{[(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{S_4}]\mu^2_{S_4}} + \frac{f^2_{N_4}}{[(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{N_4}]\mu^2_{N_4}} \right) \\
&\quad + \frac{f^2_{S_5}}{(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{S_5}} + \frac{f^2_{N_5}}{(k'_1 - k_1)^2 + \mu^2_{N_5}} \\
\mathfrak{g}_3 &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

on passe des $\mathfrak{g}_i$ aux $\mathfrak{g}'_i$ en changeant k'_1 en k'_2.

D'où, en ramenant tous les J au même ordre 1', 2', 1, 2, grâce au théorème général

$$\begin{aligned}
\langle k'_1 k'_2 \,|\, R \,|\, k_1 k_2 \rangle = \frac{-i}{16\pi^2 \hbar c} [& (s_1 + 4 s_2 + 4 s_4 - s_5) J_1 \\
& + (d_1 - 2 d_2 + 2 d_4 + d_5) J_2 \\
& + (- d_1 + d_5) J_3 \\
& + (s_1 + 2 s_2 - 2 s_4 + s_5) J_4 \\
& + (- s_1 + 4 s_2 + 4 s_4 + s_5) J_5]
\end{aligned} \qquad (92)$$

avec

$$s_i = \mathfrak{g}_i + \mathfrak{g}'_i, \qquad d_i = \mathfrak{g}_i - \mathfrak{g}'_i.$$

Il est aisé de vérifier que cette expression est antisymétrique par rapport à 1 et 2 et aussi 1′ et 2′.

Et l'on peut, par lecture du Tableau II sommer sur les états de spin et écrire (grâce à 28) la section efficace dans le système le plus général.

3.233. *La diffusion neutron-proton.* — En appelant par exemple 1 le neutron incident, 1′ le neutron diffusé, 2 le proton incident et 2′ le proton diffusé, on obtient la même formule (92), mais les nouveaux $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ se déduisent de ceux de la formule (91), ainsi :

pour les $\mathfrak{g}_i$, remplacer f_{iS}^2 par $-f_2^{iS}$ dans les $\mathfrak{g}$ de (91);

pour les $\mathfrak{g}_i$, remplacer f_{iS}^2 par $2f_{iS}^2$ et μ_{iS} par μ_{iC} dans les $\mathfrak{g}_i$ de (91) et poser $f_{iN} = 0$.

Quant à la diffusion proton-proton, elle est évidemment identique à la diffusion neutron-neutron si l'on néglige l'interaction due aux charges électriques; sinon, il suffit d'ajouter cette interaction dans $\mathfrak{g}_2$ et $\mathfrak{g}$.

3.3. La section efficace différentielle de diffusion nucléon-nucléon dans le système du centre de gravité.

— Le choix de ce système particulier de référence permet de comparer la formule théorique avec les résultats expérimentaux; cette comparaison est en cours.

La valeur de la section efficace différentielle est explicitement donnée sous forme de tableau. L'énergie de chaque nucléon est E, sa quantité de mouvement est p, l'angle entre les quantités de mouvement d'un nucléon incident et du nucléon diffusé correspondant est θ; on définit des coefficients a_A et a'_A (l'indice A ayant les trois significations possibles : C, N, S), suivant le spin isotopique du méson (*voir* 3.23).

Valeurs de...	a_N	a_S	a_C	a'_N	a'_S	a'_C
Pour la diffusion n-p	1	−1	0	0	0	2
» » n-n ou p-p ..	1	1	0	1	1	0

On pose $W = \dfrac{\varkappa^2 c^2}{p^2}$ et $w_{iA} = \dfrac{\mu_{iA}^2 c^2}{p^2}$; les coefficients c et c' du Tableau IV sont définis ainsi

$$\left.\begin{aligned} c_i &= \sum_A \frac{a_A f_{iA}^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2} + w_{iA}} \qquad \text{pour} \quad i = 1,\ 2 \text{ ou } 4, \\ c_5 &= \sum_A a_A \left[\frac{\left(\dfrac{2\varkappa}{\mu_A}\right)^2 f_{1A}^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2} + w_{1A}} - \frac{f_{3A}^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2} + w_{3A}} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

On passe des c_i aux c'_i en changeant a_A en a'_A et en changeant $\sin^2\frac{\theta}{2}$ en $\cos^2\frac{\theta}{2}$.

TABLEAU IV.

	1.	$\cos\theta$.	$\cos^2\theta$.	W.	$W\cos\theta$.	W^2.
c_1^2	1	−2	1	4	−4	4
$c_1'^2$	1	2	1	4	4	4
$c_1\ c'_1$	1	−	1	−4	−	−4
c_2^2	10	4	2	8	8	4
$c_2'^2$	10	−4	2	8	−8	4
$c_2\ c'_2$	16	−	−	−	−	−4
c_4^2	10	4	2	16	−	12
$c_4'^2$	10	−4	2	16	−	12
$c_4\ c'_4$	16	−	−	16	−	12
c_5^2	1	−2	1	−	−	−
$c_5'^2$	1	2	1	−	−	−
$c_5\ c'_5$	1	−	−1	−	−	−
$c_1\ c_2$	−	−	−	−12	−4	−8
$c_1\ c'_2$	2	−4	2	2	−10	4
$c'_1\ c_2$	2	4	2	2	10	4
$c'_1\ c'_2$	−	−	−	−12	4	−8
$c_1\ c_4$	−	−	−	−	−	−
$c_1\ c'_4$	−2	4	−2	−14	6	−12
$c'_1\ c_4$	−2	−4	−2	−14	−6	−12
$c'_1\ c'_4$	−	−	−	−	−	−
$c_1\ c_5$	−	−	−		−	−
$c_1\ c'_5$	−1	−	1	−2	−2	−
$c'_1\ c_5$	−1	−	1	−2	2	−
$c'_1\ c'_5$	−	−	−	−	−	−
$c_2\ c_4$	12	−8	−4	8	−8	−
$c_7\ c'_4$	16	−	−	24	8	12
$c'_2\ c_4$	16	−	−	24	−8	12
$c'_2\ c'_4$	12	8	−4	8	8	−
$c_2\ c_5$	−	−	−	−	−	−
$c_2\ c'_5$	2	4	2	2	2	−
$c'_2\ c_5$	2	−4	2	2	−2	−
$c'_2\ c'_5$	−	−	−	−	−	−
$c_4\ c_5$	−	−	−	4	−4	−
$c_4\ c'_5$	−2	−4	−2	2	2	−
$c'_4\ c_5$	−2	4	−2	2	−2	−
$c'_4\ c'_5$	−	−	−	4	4	−

La section efficace différentielle est

$$dQ = \frac{\mathfrak{T}\, d\Omega}{4(2\pi)^2(\hbar c)^2 E^2}. \tag{94}$$

$\mathfrak{T}$ est donné par le Tableau IV qu'il faut lire ainsi : $\mathfrak{T}$ est quadratique en c et c', les coefficients de cette forme quadratique sont obtenus en multipliant 1, $\cos\theta$, $\cos^2\theta$, ..., par les nombres de la ligne du terme c, c' choisi; par exemple : pour un méson pseudoscalaire chargé seul le terme en $c_S'^2$ n'est pas nul et l'on trouve

$$\mathfrak{T} = (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)c_S'^2.$$

Pour des mésons scalaires ou pseudo-scalaires, cette section efficace a déjà été publiée par Jean et Prentki (1950); ces sections efficaces différentielles et totales, pour le mélange mésique le plus général (y compris les couplages tensoriels omis ici) ont été calculées par C. Marty; une partie seulement de ce travail a déjà été publié : Marty (1950).

Je remercie vivement M. le professeur L. Rosenfeld pour ses conseils et l'intérêt qu'il a apporté à ce travail. Je suis très reconnaissant envers le Service des Poudres, qui m'a permis d'effectuer un long stage à l'Université de Manchester.

Appendice.

Il n'est pas possible d'étendre par récurrence le théorème aux ${}^{2n}E(R)$ avec n entier quelconque. Il est simplement possible d'énoncer que : Si le théorème est exact pour tous les ${}^{2n}E(R)$, avec $0 \leqq R \leqq 4$ et un n donné plus grand que 1 (il est vrai *a fortiori* pour les n inférieurs), il s'applique aussi aux ${}^{2(n+1)}E(0)$ et aux ${}^{2(n+1)}E(4)$.

En effet, considérons un ${}^{2(n+1)}E(0)$: il est composé de $n+1$ ${}^{2}E$; soit ${}^{2}E_1(Q)$ l'un d'eux, ses indices sont saturés par ceux d'un tenseur d'ordre Q, qui peut toujours être mis sous sa forme complètement antisymétrique (toute partie symétrique ne donnant aucune contribution). On peut donc écrire

$$ {}^{2(n+1)}E(0) = {}^{2}E_1(Q)\,{}^{2n}E(Q). $$

Soit $\mathfrak{N}(2n, R)$ le nombre de ${}^{2n}E(R)$ linéairement indépendants formés avec $2n$ ψ placés dans un ordre donné, on déduit immédiatement de ce qui précède que

$$ \mathfrak{N}(2n+2, 0) = \sum_R \mathfrak{N}(2n, R). $$

Soit P une permutation des ψ du ${}^{2(n+1)}E(0)$ considéré :

1^er^ *cas.* — P laisse invariant ψ_1 et ψ_2 de ${}^{2}E_1(Q)$, elle transforme ${}^{2n}E(Q)$ en une combinaison linéaire de ${}^{2n}E'(Q)$ ($'$ indiquant le nouvel ordre des ψ); elle transforme donc le ${}^{2n+2}E(0)$ considéré en une combinaison linéaire de ${}^{2n+2}E'(0) = {}^{2}E_1(Q).{}^{2n}E'(Q)$

2^e^ *cas.* — P remplace ψ_1 et ψ_2 de ${}^{2}E_1(Q)$ par ψ_a et ψ_b de ${}^{2n}E(Q)$; on fait la permutation (élément de φ_{2n}) qui place les ψ de ${}^{2n}E$ dans leur ordre définitif à l'exception de ψ_a et ψ_b qui sont alors mis aux places définitives de ψ_1 et ψ_2. On a ainsi une combinaison linéaire de ${}^{2}E_1(Q).{}^{2n}E''(Q) = {}^{2n+2}E''(0)$. Chacun de ces derniers peut être considéré comme le produit scalaire de ${}^{2}E_\lambda(R)$ avec ${}^{2n}E_\kappa(R)$ contenant à la fois ${}^{2}E_1$ et ψ, ce qui est possible si $n > 1$, et l'on est ramené au 1^er^ cas pour faire sur les ${}^{2n+2}E''(0)$ la permutation $(1, a)$ qui échange ψ_1 et ψ_a. On recommencera de même avec ψ_2 et ψ_b, et le théorème est encore vrai dans ce cas ([18]).

3^e^ *cas.* — P remplace un des ψ de ${}^{2}E_1(Q)$ par un des ψ de ${}^{2n}E(Q)$; ce cas se traite de façon analogue au précédent après avoir, si nécessaire, fait la permutation $(1, 2)$ sur ${}^{2}E_1(Q)$.

Il est évident qu'on peut transposer tout ce qui vient d'être démontré pour les ${}^{2n+2}E(0)$ aux ${}^{2+n2}E(4)$. Il suffit, par exemple, de transformer ${}^{2}E_1$ en ${}^{2}\breve{E}_1$.

Puisque le théorème a été démontré pour $n = 2$ et qu'il y a en tout $35\,{}^{4}E$, on peut énoncer le résultat suivant :

Avec six fonctions ψ^κ de Dirac distinctes (qui commutent ou anticommutent) on peut former 35 scalaires et 35 pseudoscalaires linéairement indépendants. Tout scalaire (respectivement pseudoscalaire) formé avec les six ψ^κ placés dans un ordre donné est une combinaison linéaire de scalaires (respectivement pseudoscalaires) formés avec les mêmes ψ^κ placés dans un autre ordre.

([18]) Évidemment si $n \geqq 3$ on peut, remplacer ces deux dernières permutations par la seule permutation $(1, a)$, $(2, b)$.

Manuscrit reçu en janvier 1951.

BIBLIOGRAPHIE.

BHABHA H. J. — *Proc. Roy. Soc.*, 1936, A **154**, 195.
CRITCHFIELD L. et WIGNER E. — *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 412.
CRITCHFIELD L. — *Phys. Rev.*, 1943, **63**, 417.
DIRAC P. A. M. — The Principles of Quantum Mechanics, 1947, 3^e^ éd., Oxford, Clarendon Press.
DYSON F. J. — *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 929; *ibid.*, 1949, **75**, 485 et 1736.
ENATSU H. — *Prog. Theoret. Phys.*, 1950, **5**, 102.
FIERZ M. — *Z. Physik*, 1937, **104**, 553.
JEAN M. et PRENTKI J. — *J. Physique Rad.*, 1950, **11**, 33.
KEMMER N. — *Proc. Roy. Soc.*, 1938, A **166**, 127.
KOFINK W. — *Ann. Physik* (V), 1937, **30**, 91; *ibid.*, 1940, **38**, 420.
KRAMERS H. K. — *Proc. Amst. Akad. Sc.*, 1937, **40**, 814.
LE COUTEUR K. J. et ROSENFELD L. — *Phil Mag.*, 1949, **40**, 151.
MAJORANA E. — *Nuovo Cim.*, 1937, **14**, 171.
MARTY C. — *Nature* (Lond.), 1950, **165**, 361.
MATTHEWS P. T. — *Phys. Rev.*, 1949 *a.*, **76**, 684 et 1419. *Phys. Rev.*, 1949 *b.*, **76**, 1254.
MICHEL L. — *Proc. Phys. Soc.*, 1950 *a.*, A **63**, 514. *Nature* 1950 *b.*, 166, 654.
MØLLER C. — *Det Danske Vid. Sels*, 1945 et 1946, **23**, n° 1 et **22**, n° 19.
NELSON E. C. — *Phys. Rev.*, 1941, **60**, 830.
PAULI W. — *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1936, **6**, 109; *Rev. Mod. Phys.*, 1941, **13**, 203.
PAIS A. — *Kon. Ned. v. Wet. Verh.*, 1947, D 1, **19**, 1.
RACAH G. — *Nuovo Cim.*, 1937, **14**, 322.
VANHOVE L. — *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 1519.