

## LES BRISURES SPONTANÉES DE SYMÉTRIE EN PHYSIQUE

L. MICHEL

Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 91440 Bures-sur-Yvette, France

**Résumé.** — Quelques remarques non scientifiques mais importantes. Notion de brisure spontanée de symétrie ; premier exemple reconnu (Jacobi 1834) et ses relations actuelles avec l'astronomie. On donne deux critères servant à déterminer sur quels sous-groupes du groupe de symétrie peut se briser spontanément une symétrie ; illustration dans les cristaux liquides et les particules élémentaires. Pour ces derniers, après un survol des nombreuses découvertes des années récentes la théorie de Gürsey est brièvement exposée.

**Abstract.** — After some non-scientific non-irrelevant remarks, the concept of broken symmetry is explained and illustrated by the first historical example (Jacobi ellipsoid 1834) still useful in astronomy. Two criteria are given for finding on which subgroups of the symmetry group a symmetry can be broken ; examples in liquid crystals and elementary particles. A brief survey of the recent progress in the latter domain and of the Gürsey theory.

Je dois avouer ne pas entièrement comprendre le rôle du prix qui m'a été attribué. Certes je suis sensible à la gentillesse du geste des collègues de la Société Française de Physique qui m'ont ainsi manifesté leur estime. Je leur en suis reconnaissant, mais j'ai eu la chance que l'estime de mes collègues m'ait été donnée tout au long de ma vie, dans de nombreux pays, à l'occasion de chacune des invitations que j'ai reçues pour occuper un poste. Ce fut aussi le cas en France pour tous les postes, sans exception, où l'on m'a invité depuis vingt ans (à Lille, à Paris et Orsay, à l'Ecole Polytechnique, à l'IHES) sans que j'aie fait acte de candidature.

Si je me suis décidé à accepter ce prix, c'est parce que je n'avais pas eu à faire acte de candidature. C'est encore trop rare dans notre pays. Par contraste quelle tristesse par exemple de voir des chaires ouvertes à la sauvette. Je souhaite que pour chaque chaire ou maîtrise vacante, les physiciens de chaque université recherchent le meilleur homme pour ce poste, avec la même méthode et le même sérieux que — comme vient de nous le rappeler son Président — le comité de la Société Française de Physique le fait pour les prix. Cela est possible, cela s'est fait et se devrait toujours faire. Offrir une chaire est en général tellement plus important qu'offrir un prix !

Le rôle des prix de la Société Française de Physique serait alors plus modeste, mais cependant important. Il s'agirait d'attirer l'attention sur un physicien mal reconnu, ou qui, simplement, n'a pas eu de chance. C'est dans ce sens que j'ai décidé de ne pas accepter le chèque qui accompagne ce prix. Pour choisir un

récipiendaire, avec quelques collègues, nous n'avons eu que l'embarras du choix parmi la génération des 22 à 25 ans. Trop peu de jeunes peuvent actuellement s'essayer à la recherche scientifique, même s'ils sont normaliens ou polytechniciens, et surtout s'ils ne le sont pas. Parmi eux, nous avons choisi Mr Alain Bouquet, 25 ans. Aucun de nous ne le connaissait personnellement, mais nous avons apprécié ses excellents travaux sur les grands moments transverses dans le modèle thermodynamique de production des hadrons. Pour vivre, Mr Bouquet est aide-bibliothécaire et reçoit ainsi en vacation 750 F par mois.

Pour donner à plus de jeunes leur chance de s'essayer à la recherche scientifique, il faut favoriser la mobilité de leurs aînés, en abattant par exemple quelques cloisons. Quel merveilleux apport ce serait pour notre enseignement secondaire s'il cherchait à recruter des docteurs es sciences, comme cela se fait dans tous les grands pays scientifiques !

Oublions maintenant les prix et les promotions. Les joies les plus profondes de notre métier sont certainement celles qui accompagnent la découverte ; joie modeste d'ailleurs car pour la plupart d'entre nous, si nous n'avions pas fait nos découvertes, elles auraient été faites par d'autres dans l'année ou les années qui suivent. Enfin, il y a le plaisir immense de contempler et de faire connaître la science en cours de formation.

Lorsque j'ai lu dans un journal qu'on m'attribuait le prix Robin pour mes travaux sur les interactions faibles, j'ai beaucoup apprécié l'humour de mes collègues : j'avais été spécialiste de ce domaine, mais

je m'y suis montré assez stupide, manquant toutes les découvertes qui y étaient à faire. Par contre, j'ai lu en rougissant, dans le bulletin de la société, le texte qui accompagne ma citation de prix. Mais comme il ne parle pas de mes travaux sur les symétries brisées, c'est ce sujet que j'ai choisi. J'espère vous faire partager mon enthousiasme !

Physiciens français, nous sommes très sensibles à la symétrie. Nous connaissons tous ces citations de Pierre Curie [1] :

— Lorsque certaines causes produisent certains effets les éléments de symétrie des causes doivent se trouver dans les effets produits.

— Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.

Parler de brisure spontanée de symétrie, c'est donc réfuter ces assertions. Bien sûr Curie n'ignorait pas ces phénomènes. Au cours d'un changement d'état réversible (par exemple une transformation allotropique d'un cristal) si la symétrie augmente spontanément dans un sens, elle doit se briser spontanément dans la transformation inverse. Citons quelques exemples plus récents de symétrie brisée : la turbulence, la fission asymétrique des noyaux (quant aux symétries spatiales), les réactions chimiques périodiques issues d'une phase homogène, la supraconductivité (l'invariance de jauge est brisée et on peut mesurer la phase relative de deux supraconducteurs par l'effet Josephson), les symétries internes des particules élémentaires dont je parlerai à la fin de cette conférence.

La non-conservation de la parité, au stade actuel de nos connaissances, n'est pas un exemple de symétrie spontanément brisée <sup>(1)</sup>. En effet, les interactions « faibles » ne sont pas invariantes par réflexion et la symétrie plane d'un système physique peut donc disparaître au cours de son évolution (e.g. désintégration  $\beta$ ) ; cela ne se produit pas pour les phénomènes électromagnétiques. La précédente fois où j'avais été invité à m'adresser à la Société Française de Physique, il y a dix-huit ans, j'avais eu à expliquer que nous avions été déformés par l'enseignement secondaire lorsqu'on nous apprenait la règle du bonhomme d'Ampère ou du tire-bouchon de Maxwell. Cette fois-ci je vais devoir lutter contre la formation que nous avons tous reçue de respecter, par esthétique, la symétrie des problèmes. Les solutions non symétriques existent aussi et sont souvent encore plus belles <sup>(2)</sup> !

Historiquement, à ma connaissance, le premier exemple de symétrie spontanément brisée a été

<sup>(1)</sup> Mais il n'est pas impossible qu'il soit compris comme tel ultérieurement.

<sup>(2)</sup> La plupart de mes réflexions sur les symétries brisées ont été élaborées en discutant depuis huit ans avec L. Radicati. Je tiens aussi à remercier ici D. Kastler, J. Lascous, J. Mozrzymas, R. Stora et mes collègues de l'IHES, spécialement D. Ruelle et R. Thom, de m'avoir fortement influencé à ce sujet.

découvert par Jacobi [2] en 1834. Considérons une masse  $m$  de fluide incompressible, isolé, en cohésion par son attraction gravitationnelle, et soumis à un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe ( $Ox_3$ ), de vitesse angulaire constante  $\Omega_0$ . Lorsque  $\Omega_0 = 0$ , la figure d'équilibre est une sphère ; pour un certain domaine de valeur de  $\Omega_0$ , il existe un équilibre statique dans le repère tournant, la surface d'équilibre du liquide étant un ellipsoïde de révolution aplati. Le tableau I donne les équations, en fonction de  $\Omega_0$ , satisfaites par les longueurs des axes principaux  $a_1, a_2, a_3$  de l'ellipsoïde. Cela donne une assez bonne approximation de l'aplatissement de la Terre. Mais ces mêmes équations ont aussi une autre famille de solutions, découverte par Jacobi. Elles sont asymétriques :  $a_1 \neq a_2$ , l'ellipsoïde ayant trois axes inégaux.

Une figure est encore plus parlante qu'un ensemble d'équations, les coordonnées  $\lambda$  et  $\mu$  de la figure 1 sont définies dans la légende. Il s'agit essentiellement de coordonnées triangulaires. L'origine O correspond à la sphère ; les demi-axes  $OD_i$ , respectivement  $OB_i$ , représentent des ellipsoïdes d'axe de révolution  $Ox_i$ , de plus en plus aplatis, respectivement allongés, au fur et à mesure qu'on s'éloigne de O, pour devenir asymptotiquement des disques (D), respectivement des barres (B). Le demi-axe  $OD_3$  décrit les solutions symétriques, la courbe transverse  $P_2 KP_1$ , les solutions asymétriques de Jacobi. Le point d'intersection K est le point de bifurcation de Jacobi.

Ce qui est remarquable c'est que de K partent encore d'autres branches de figures d'équilibres ellipsoïdales correspondant à l'apparition de courants de convection (étudiés par Dirichlet, Riemann, Dedekind). H. Poincaré essayant de comprendre la formation des planètes et de leurs satellites a découvert une infinité de points de bifurcations le long de la trajectoire de Jacobi, correspondant, au lieu des ellipsoïdes (c'est-à-dire quadrupôle  $L = 2$ ), à toutes les harmoniques sphériques pour  $L > 2$ . E. Cartan a étudié les conditions d'équilibre de ces nouvelles branches. Pour l'époque actuelle on peut se référer aux contributions et aux revues de Chandrasekhar [3] (avec une excellente revue historique) et de J. M. Bardeen [4]. Les astrophysiciens introduisent le paramètre

$$t = \frac{\text{Energie de rotation}}{|\text{Energie potentielle}|} \quad (1)$$

Le théorème du viriel impose pour tout système en interaction gravitationnelle

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Au point de bifurcation de Jacobi (liquide incompressible)

$$t = 0,1375\dots \quad (3)$$

Cette valeur de  $t$  a une signification assez universelle : la brisure de la symétrie axiale y apparaît pour la solution statique quelle que soit l'équation d'état du fluide ; ce résultat récent est essentiellement dû à

TABLEAU I

Masse du fluide  $m$ , vitesse angulaire constante  $\Omega_0$  autour de  $Ox_3$ . La surface libre du liquide incompressible est donnée par l'équation

$$\sum_{i=1}^3 (x_i/a_i)^2 = 1. \tag{1}$$

On définit les intégrales

$$A^{(k)} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{u^k du}{\sqrt{D}},$$

$$A_i^{(k)} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{u^k du}{\sqrt{D(a_i^2 + u)}},$$

$$A_{ij}^{(k)} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{u^k du}{\sqrt{D(a_i^2 + u)(a_j^2 + u)}}$$

où

$$D = (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u).$$

Noter que

$$A_1^{(0)} + A_2^{(0)} + A_3^{(0)} = 2.$$

L'équilibre hydrostatique dans le repère tournant s'écrit

$$\frac{p}{\rho} = V(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \Omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2) + \text{Cte} \tag{2}$$

où  $p$  est la pression,  $\rho$  la densité :  $m = 4 \pi a_1 a_2 a_3 \rho/3$  et l'énergie potentielle

$$V(\mathbf{x}) = \pi G \rho \left( A^{(0)} - \sum_{i=1}^3 A_i^{(0)} x_i^2 \right) \tag{3}$$

$G$  est la constante de gravitation et  $\Omega = \Omega_0/\sqrt{\pi G \rho}$  est sans dimension. En écrivant que  $p = 0$  sur la surface, la comparaison de (1) et (2) donne les conditions d'équilibre :

$$(\Omega^2 - 2 A_1^{(0)}) a_1^2 = (\Omega^2 - 2 A_2^{(0)}) a_2^2 = -2 A_3^{(0)} a_3^2. \tag{4}$$

La première égalité peut encore s'écrire

$$(a_1^2 - a_2^2) (\Omega^2 - 2 A_{12}^{(1)}) = 0. \tag{5}$$

Solutions à symétrie axiale :

$$a_1^2 - a_2^2 = 0$$

(il en existe deux pour chaque  $\Omega < 0,449\ 33\dots$ ).

Solutions à trois axes inégaux :

$$\Omega^2 - 2 A_{12}^{(1)} = 0$$

(il en existe une pour chaque  $\Omega < 0,372\ 30\dots$ ).

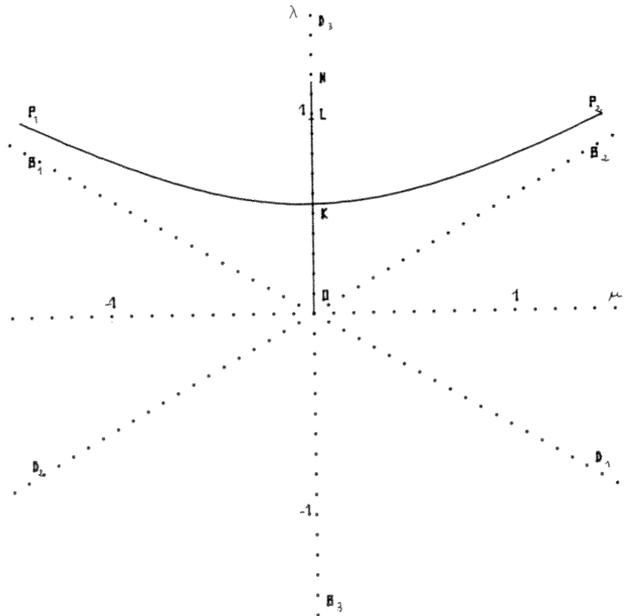


FIG. 1. — Le volume de l'ellipsoïde étant constant (liquide incompressible), l'échelle est donnée par  $a = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$ ; le choix des coordonnées

$$\mu = (a_1^2 - a_2^2)/(2 a^2), \quad \lambda = (a_1^2 + a_2^2 - 2 a_3^2)/(2 \sqrt{3} a^2)$$

correspond aux coordonnées triangulaires : les abscisses du point  $(\lambda, \mu)$  sur les axes orientés  $OB_i$  sont  $(a_i/a)^2 - \gamma/3$  où  $\gamma = \sum_i (a_i/a)^2$

(la somme de ces abscisses doit être nulle). L'origine  $O$  correspond à la sphère, les demi-axes  $OB_i$  représentent des ellipsoïdes, d'axe de révolution  $Ox_i$  (qui tendent asymptotiquement allongés vers la barre  $B_i$ ), les semi-axes  $OD_i$  représentent des ellipsoïdes aplatis, d'axe de révolution  $Ox_i$  (qui tendent asymptotiquement vers le disque  $D_i$ ). Le demi-axe  $OD_3$  décrit les solutions symétriques, la courbe transverse  $P_2 KP_1$  les solutions asymétriques de Jacobi. Le point d'intersection  $K$  est le point de bifurcation de Jacobi ( $\Omega = 0,372\ 30\dots, \lambda = 0,546\ 545\dots, \mu = 0$ ). Sur l'axe  $\lambda$  la valeur de  $\Omega^2$  croît de  $O, \Omega^2 = 0$ , à  $L (\lambda = 0,972\ 838, \mu_i = 0), \Omega^2 = 0,449\ 331\dots$ , puis décroît ( $\Omega^2 \rightarrow 0$  si  $\lambda \rightarrow \infty$ ). De même  $\Omega^2$  décroît en fonction de  $|\mu|$  sur la branche de Jacobi. Par contre le moment angulaire est une fonction toujours croissante de  $\lambda$  et de  $|\mu|$ . Les trajectoires  $OK$  et  $KP_1, KP_2$  sont stables. En  $P_i (\lambda = 0,973\ 949\dots, \mu = \pm 1,445\ 680\dots, \Omega^2 = 0,284\ 030\dots)$  apparaît l'instabilité de Poincaré (déformation pour l'harmonique  $L = 3$ ). La partie  $KN$  des solutions symétriques est métastable. L'énergie est plus élevée que la solution asymétrique ; elle est aussi instable par apparition de courants de convection et chaque point de  $KN$  est un point de bifurcation ;  $N$  est défini par  $\Omega^2 - 4 A_{12}^{(1)} = 0 (\lambda = 1, 161\ 225\dots, \mu = 0, \Omega^2 = 0,440\ 220\dots)$ .

Le point de bifurcation satisfait

$$a_1^2 - a_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad \Omega^2 - 2 A_{12}^{(1)} = 0$$

et (de (4))

$$a_1^2 a_2^2 A_{12}^{(0)} = a_3^2 A_3^{(0)}$$

soit

$$\Omega = 0,372\ 30\dots \quad \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = 0,582\ 724\dots$$

Bertin et Radicati [5]. Le long de la branche de Jacobi,  $t$  croît très lentement. Toutes les simulations numériques indiquent une apparition d'instabilité pour  $t$  supérieur à 0,1375 de quelques millièmes. Or des galaxies spirales, dont la nôtre, ont un  $t$  plus grand ; comment sont-elles stables ? [4, 6].

Pour résumer, nous voyons que les solutions sont données par

$$\left. \begin{array}{l} SB = 0 \quad S = 0 \quad \text{solutions symétriques} \\ B = 0 \quad \quad \quad \text{solutions non symétriques} \\ S = 0 = B \quad \quad \quad \text{point de bifurcation} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Ce schéma semble assez général. Supposons par exemple que nous ayons à trouver les extréma d'une fonction définie sur notre espace à trois dimensions et invariante par rotation. Elle ne dépend donc que de  $r^2$ . Ses extréma, par rapport au point O, sont donnés par

$$\left. \begin{array}{l} \text{grad } f = 2 \mathbf{r} \frac{df}{dr^2} = 0 \\ \mathbf{r} = 0 \text{ correspond à une solution symétrique} \\ \frac{df}{dr^2} = 0 \text{ aux solutions asymétriques} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Quand on obtient une solution asymétrique on a (en (4), ou en (5) ou en général) toute une famille en faisant agir le groupe de symétrie (par exemple, à un instant donné, en considérant tous les ellipsoïdes de Jacobi obtenus par rotation autour de  $Ox_3$ ). L'ensemble des solutions est donc invariant par le groupe. C'est en cela qu'il faut utiliser la symétrie du problème et non pas pour chaque solution individuellement.

Rappelons ici des notions simples<sup>(3)</sup>. Un groupe  $G$  (éléments notés  $g, h, \dots$  et  $l$  l'identité de  $G$ ) agit sur un ensemble  $M$  (éléments notés  $x, y, \dots$ ) lorsque chaque  $g$  permute les éléments de  $M$ , c'est-à-dire  $x \in M$  est transformé en  $g.x \in M$  par  $g$ , cette transformation satisfaisant  $l.x = x$ ,  $f.(g.x) = (fg).x$ . L'ensemble des transformés de  $x$  est noté  $G(x)$  et est appelé l'orbite de  $x$  (prouver que deux orbites distinctes n'ont pas de points communs !). L'ensemble des  $g \in G$  qui laisse  $x$  invariant :  $g.x = x$  est un sous-groupe  $G_x$  qu'on appelle le stabilisateur de  $x$  (ou encore groupe d'isotopie de  $x$ , ou encore petit groupe de  $x$ ). Si  $y \in G(x)$  il existe  $g \in G$  tel que  $y = g.x$  ; on prouve alors

$$G_y = gG_x g^{-1} \quad (6)$$

les stabilisateurs des points d'une orbite sont conjugués entre eux. La réciproque n'est pas vraie ; si deux points  $x$  et  $y$  ont des stabilisateurs conjugués (6),  $x$  et  $y$  ne sont pas nécessairement sur la même orbite mais, par définition, ils sont sur le même stratum ;

<sup>(3)</sup> Ces notions sont — ou devraient être — enseignées dans l'enseignement secondaire. Nous pouvons donc les utiliser pour enseigner la physique !

un stratum est ainsi l'union de toutes les orbites d'un même type. On notera  $S(x)$  le stratum de  $x$ . Il y a un ordre partiel naturel sur les classes de conjugaison des stabilisateurs qui apparaissent dans l'action de  $G$  sur  $M$  (on note  $[G_x]$  la classe de  $G_x$ ,  $[G_x] < [G_y]$  si  $G_x$  est conjugué d'un sous-groupe de  $G_y$ ).

Souvent en physique classique la symétrie d'un problème n'est pas apparente car les conditions initiales ou les conditions aux limites ne peuvent pas respecter cette symétrie. C'est le cas par exemple du problème de Képler : mouvement dans un potentiel en  $1/|r|$ , invariant par rotation. Les solutions (les trajectoires sont des coniques de foyer en O) n'ont pas cette invariance (exercice : chercher les orbites de solution et les stabilisateurs correspondants). Par contre, en physique quantique, l'état fondamental du même problème est invariant par rotation.

Lorsque la symétrie est brisée, savoir laquelle des solutions d'une orbite est choisie dans le phénomène qu'on étudie, est d'un intérêt secondaire, surtout pour les symétries spatiales ; dans ce cas, le choix est dû à une irrégularité (par exemple germe cristallin) ou même parfois à une fluctuation statistique. Ce qui est important c'est de pouvoir prévoir en quel sous-groupe la symétrie peut être brisée. C'est ce qui a été fait en cristallographie à la fin du siècle dernier. Les interactions entre les ions ou les atomes constituant un cristal sont invariantes par déplacement euclidien (translation et rotation), mais le cristal (même supposé parfait et indéfini) n'est invariant que pour un sous-groupe du groupe euclidien  $E(3)$ . Il y a 230 classes de groupes cristallographiques<sup>(4)</sup>. Parfois, et de plus en plus, pour un problème de mécanique statistique classique ou quantique, ainsi que pour un problème de mécanique quantique on peut prévoir l'ensemble des stabilisateurs qui apparaîtront pour l'action de  $G$  dans l'espace des états et donc comment peut se casser la symétrie. J'ai contribué à ce problème [7], [8] (pour la revue la plus récente sur ce sujet voir D. Kastler [9]), mais ce travail est assez abstrait et je n'ai pas le temps de l'exposer ici. Retenons simplement que l'espace d'Hilbert  $\mathcal{H}$  de la théorie est une intégrale, sur l'orbite  $G(x)$ , d'espaces d'Hilbert  $\mathcal{H}_x$ . En général on oublie  $\mathcal{H}$  pour ne garder que  $\mathcal{H}_x$ , qui est alors invariant par le sous-groupe  $G_x$ , mais qui ne l'est plus par  $G$ . (Cela est parfois exprimé cryptiquement par les physiciens quantiques en disant que le vide n'est plus invariant par  $G$ .)

Récemment ont été trouvés des critères simples pour déterminer sur quel sous-groupe et dans quelles directions peut se casser spontanément la symétrie d'un problème. Je vais vous en présenter deux.

Par raison de symétrie, toute fonction réelle paire  $f(x) = f(-x)$  doit avoir sa dérivée nulle à l'origine. Au lieu d'un groupe de deux éléments et de la droite

<sup>(4)</sup> Les classes de conjugaisons sont dans le groupe  $InL_+(3, R)$  : le groupe linéaire inhomogène à 3 dimensions, pour les opérations homogènes de déterminant positif. Dans  $InL(3, R)$  il n'y aurait que 219 classes.

réelle, considérons un groupe compact  $G$  (cela inclut les groupes finis) agissant sur une variété  $M$  (cela inclut les espaces linéaires; on peut aussi étendre ce qui va être dit aux représentations linéaires des groupes cristallographiques). Toutes les fonctions réelles différentiables définies sur  $M$  et invariantes par  $G$  ont en commun des extréma ( $df = 0$ ) qu'on peut facilement caractériser. Puisque la fonction est constante sur chaque orbite de  $G$ , ces extrema communs sont sur des orbites que nous appellerons *critiques*. J'ai montré [10] que ce sont les orbites qui sont isolées dans leur stratum c'est-à-dire : dans leur voisinage il n'y a pas d'autres orbites de même nature. Ces orbites sont rares (en effet, on montre que dans ce cas il y a un plus petit groupe d'isotropie et que le stratum correspondant est ouvert et dense) mais il est bon de savoir les reconnaître. On voit de plus que pour tout problème physique qui se déduit d'un principe variationnel et qui a un groupe d'invariance compact  $G$ , les solutions données par les orbites critiques sont communes à toutes les fonctions à varier. Le physicien qui a construit un modèle — c'est-à-dire choisi une fonction à varier — ne doit pas croire que son modèle est justifié parce qu'il a trouvé de bonnes solutions ! Dans le cas précis des orbites critiques il a simplement vérifié un théorème général !

Les stabilisateurs des orbites critiques ne sont pas le groupe minimal. En général ils sont maximaux. De plus on peut prouver quand  $M$  est compact [10] que toute fonction invariante a au moins une orbite d'extrémum pour chaque stabilisateur maximal. D'où l'existence d'un *Principe de minimalité de cassure spontanée des symétries*.

Les symétries ont aussi une grande tendance à se casser dans les directions idempotentes ou nilpotentes d'algèbres symétriques, en général non associatives, qui apparaissent naturellement dans les actions linéaires de groupes <sup>(5)</sup>. Expliquons cette phrase en partant d'un exemple, en revenant aux ellipsoïdes du début. Toute quadrique est donnée par une équation

$$\sum_{ij} x_i \hat{Q}_{ij} x_j = 1 \quad \text{où} \quad \hat{Q}_{ij} = \hat{Q}_{ji}.$$

En enlevant la trace

$$Q_{ij} = \hat{Q}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k \hat{Q}_{kk} \quad (7)$$

ce que je préfère écrire sans indice

$$Q = \hat{Q} - \frac{1}{3} I \text{tr} \hat{Q}, \quad (7')$$

on obtient un quadripôle  $Q$  satisfaisant à

$$Q^T = Q, \quad \text{tr} Q = 0. \quad (8)$$

Une rotation  $R$  transforme le quadripôle suivant la loi

$$Q \rightarrow RQR^{-1}. \quad (9)$$

<sup>(5)</sup> Toutes les considérations qui vont suivre ont été élaborées avec Radicati.

Les quadripôles forment un espace réel de dimension 5 d'une représentation irréductible (de spin 2) du groupe des rotations. Il y a un produit scalaire invariant

$$(Q_1, Q_2) = \frac{1}{2} \text{tr} Q_1 Q_2. \quad (10)$$

Avec deux quadripôles  $Q_1, Q_2$  on peut former un troisième, que nous noterons  $Q_1 \vee Q_2$ , par la loi

$$Q_1 \vee Q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} (Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1) - \frac{2}{\sqrt{3}} I(Q_1, Q_2). \quad (11)$$

Avec trois quadripôles on peut donc former un scalaire invariant par les rotations :  $(Q_1 \vee Q_2, Q_3)$ . Je vous suggère les deux exercices suivants :

1) prouver que  $Q \vee Q \vee Q = Q(Q, Q)$ , que  $Q_1 \vee (Q_2 \vee Q_3) \neq (Q_1 \vee Q_2) \vee Q_3$ ;

2) en dehors de l'origine il y a deux strata : le stratum générique ouvert dense (quadripôle à 3 axes inégaux) dont le stabilisateur est engendré par 3 rotations de 180° autour des axes du quadripôle, et l'autre stratum contient les quadripôles ayant un axe de révolution. Les orbites du stratum dense sont de dimension trois. Pour remplir avec elles l'espace à 5 dimensions des quadripôles il en faut donc une infinité à deux paramètres. Ces paramètres sont donnés par les deux invariants

$$\begin{aligned} \gamma(Q) &= (Q, Q) = \frac{1}{2} \text{tr} Q^2, \\ \theta(Q) &= (Q \vee Q, Q) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{tr} Q^3. \end{aligned} \quad (12)$$

Réciproquement et très généralement, comme cela est expliqué dans le tableau 2, éq. (3), à tout invariant du 3<sup>e</sup> degré d'une représentation linéaire d'un groupe  $G$  on peut faire correspondre une algèbre symétrique  $x \vee y = y \vee x$ , non associative en général. Une fonction invariante est une fonction des invariants et le tableau II indique comment calculer son gradient et son Hessian en tout point. Nous suggérons au lecteur de le faire explicitement dans le cas d'un quadripôle.

Les états physiques de beaucoup de milieux peuvent être représentés par un paramètre d'ordre  $Q$ , qui est un quadripôle : c'est le cas par exemple des cristaux liquides nématiques ou smectiques homogènes. Tout potentiel thermodynamique, par exemple l'énergie libre  $F$ , est alors une fonction invariante de  $Q$ . Un développement en fonction du paramètre d'ordre s'écrira ainsi <sup>(6)</sup> (e.g. de Gennes [11], [12])

$$\begin{aligned} F &= F_0 + \frac{1}{2} A(T) \text{tr} Q^2 + \frac{1}{3} B(T) \text{tr} Q^3 + \\ &+ \frac{1}{4} C(T) \text{tr} Q^4 + 0(Q^5). \end{aligned} \quad (13)$$

<sup>(6)</sup> Nous laissons en exercice la preuve que  $2 \text{tr} Q^4 = (\text{tr} Q^2)^2$ .

TABLEAU II

(Travail non publié fait avec L. A. Radicati)

On a sur l'espace vectoriel réel  $E$  (éléments  $x, y, z, \dots$ ) de dimension  $n$ , une représentation irréductible réelle de  $G$  par des matrices orthogonales

$$g \in G : \Delta(g^{-1}) = \Delta(g)^T. \quad (1)$$

Soit  $\gamma(x) = (x, x)$  le produit scalaire invariant et  $\theta(x)$  un invariant du 3<sup>e</sup> degré. De même qu'à partir de  $\gamma(x)$  on définit le produit scalaire de 2 vecteurs

$$(x, y) = \frac{1}{2!} (\gamma(x+y) - \gamma(x) - \gamma(y)) \quad (2)$$

on peut définir pour tout triplet de vecteurs  $x, y, z \in E$

$$(x \vee y, z) = \frac{1}{3!} (\theta(x+y+z) - \theta(x+y) - \theta(y+z) - \theta(z+x) + \theta(x) + \theta(y) + \theta(z)) \quad (3)$$

ce qui définit l'algèbre symétrique  $x \vee y = y \vee x$ . On définit pour tout  $x$  de  $E$  l'opérateur  $D_x$  par :

$$\forall y \in E, \quad D_x y = x \vee y. \quad (4)$$

Soit  $f(\gamma, \theta)$  une fonction sur  $E$  invariante par  $G$ . On définit les notations

$$\begin{aligned} s &= 2 \frac{\partial f}{\partial \gamma}, \quad t = 3 \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad u = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}, \\ w &= 6 \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma \partial \theta}, \quad v = 9 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

On calcule le gradient et le Hessian de  $f$  en  $x$  :

— gradient :

$$df = sx + tx \vee x \quad (6)$$

— Hessian :

$$\begin{aligned} d^2f &= sI + 2tD_x + w\gamma(x)P_x + v\gamma(x \vee x)P_{x \vee x} + \\ &+ w(x \otimes (x \vee x) + (x \vee x) \otimes x) \end{aligned} \quad (7)$$

où  $P_z$  est le projecteur sur  $z$ , i.e.  $P_z = \gamma(z)^{-1} z \otimes z$ .

Les extréma sont donnés par  $df = 0$ . Il y a trois types de solutions :

(I)  $x = 0$  alors  $d^2f = sI$  minimum si  $s > 0$ , maximum si  $s < 0$ .

(II)  $sx + tx \vee x = 0$ , les vecteurs  $x \vee x$  et  $x$  sont colinéaires. La nature de l'équilibre est donnée par le signe des valeurs propres de :

$$d^2f = sI + 2tD_x + \frac{\gamma}{t^2} (ut^2 - 2wst + vs^2) P_x.$$

(III)  $s = 0$  et  $t = 0$ .

Les coefficients sont fonction de la température  $T$ . Quand  $A(T) > 0$ , le minimum  $Q = 0$  (type I du tableau II) correspond à une phase isotrope ; elle peut être métastable s'il existe un minimum plus bas pour  $Q \neq 0$ . En abaissant la température,  $A(T)$  peut devenir négatif et la phase stable est en général un minimum de type (II) du tableau II :  $Q$  a un axe de symétrie, la phase est nématique ; un minimum de type (III) correspond à un quadripôle à 3 axes inégaux, comme c'est le cas d'une phase smectique. On peut prendre pour le paramètre quadripolaire  $Q$  une grandeur directement observable, comme la susceptibilité magnétique quadripolaire. Lorsqu'il y a un champ magnétique il faut alors ajouter à  $F$  en (13) un terme ([12] éq. (III.1))

$$F_{\mathbf{H}} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} H_\alpha Q_{\alpha\beta} H_\beta = \chi(Q, M) \quad (14)$$

où

$$M = -\sqrt{3}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3}I), \quad \mathbf{n} = \mathbf{H}/|\mathbf{H}| \quad (15)$$

est le quadripôle de longueur unité ayant  $\mathbf{H}$  pour axe de symétrie :

$$(M, M) = 1, \quad M \vee M + M = 0 \quad (16)$$

et

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{3}} |\mathbf{H}|^2 > 0. \quad (17)$$

Je vous invite alors à lire sur la légende de la figure 2 ce qui peut se passer lorsqu'on fait varier le champ magnétique. Le point K est un point de bifurcation. Ces phénomènes peuvent-ils être réalisés par un cristal liquide ? Je ne sais pas si les paramètres choisis sont réalistes. Je demande à mes collègues spécialistes des cristaux liquides de me le dire. Un bon formalisme suggère des expériences.

Pour les cristaux liquides, le coefficient  $B$  de l'invariant du 3<sup>e</sup> degré de (13) n'est pas nul, mais souvent assez petit et les transitions de phase à partir de la phase isotrope sont du 1<sup>er</sup> ordre, mais appelées parfois *quasi du 2<sup>e</sup> ordre*. La célèbre théorie de Landau sur les transitions de phase du second ordre [13], [14], requiert l'absence d'invariants du 3<sup>e</sup> degré. Cette théorie permet de prédire entre quels groupes cristallographiques peut exister une transition du second ordre. Le calcul de ces règles de sélection n'a été fait que pour quelques-uns des 230 groupes (voir par exemple [15]). Mozrzymas et moi pensons avoir trouvé une méthode plus puissante pour effectuer ces calculs, mais il est trop tôt pour en parler ici.

Par leur présence ou leur absence, les invariants du 3<sup>e</sup> degré pour une représentation linéaire d'un groupe  $G$  jouent un rôle si important dans la brisure spontanée de la symétrie  $G$  au cours d'une transition continue qu'on pourrait classer ces transitions en 3 classes :

1) Celles où l'invariant du 3<sup>e</sup> degré est essentiel (exemples Fig. 1 et 2).

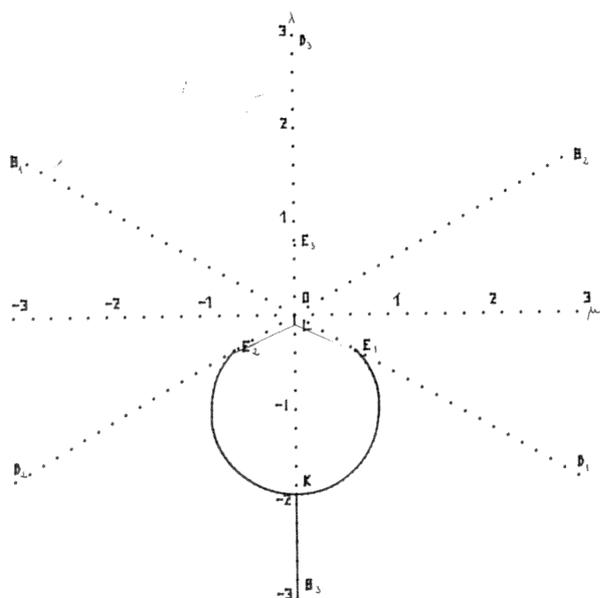


FIG. 2. — Les coordonnées de ce diagramme ont la même signification que pour la figure 1. Ce diagramme correspond à la fonction

$$F = 0,095 \gamma(Q) + \frac{1}{3} \theta(Q) + \frac{1}{4} (\gamma(Q))^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} H_{\alpha} Q_{\alpha\beta} H_{\beta} \quad (1)$$

pour l'énergie libre, c'est-à-dire dans l'éq. (13)  $A = 0,095$ ,  $B = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ,  $C = \frac{1}{2}$ . Quand il n'y a pas de champ magnétique ( $H = 0$ ), la phase stable a un quadrupôle de révolution (aplati) défini par

$$\gamma(Q) = (0,745)^2, \quad \theta(Q) = -(0,745)^3.$$

Les points  $E_1, E_2, E_3$  représentent les orientations de ce quadrupôle suivant les axes  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ . La phase isotrope, représentée par l'origine  $O$ , est légèrement métastable ( $F_0=0, F_E=-0,0081$ , entre les deux il y a un maximum de valeur  $0,0017$ ). Quand on fait croître le champ magnétique à partir de  $0$ , la phase isotrope acquiert un quadrupôle et va jusqu'en  $L$  ( $\lambda = 0,1, \mu = 0$ ) pour un champ  $H = 0,228$ ; là, par une transition du 1<sup>er</sup> ordre elle va (1<sup>re</sup> brisure spontanée) en un point légèrement au-dessus de  $E_1$  ou  $E_2$ . Elle suit le cercle (à l'équateur  $\lambda = -1, \mu = \pm 0,9, H = 1,861\dots$ ) puis atteint le pôle en  $K$  ( $\lambda = -1,9, \mu = 0, H = 4,331\dots$ ) et pour les champs plus forts on a encore la symétrie axiale autour de  $Ox_3$ . Quand on rediminue le champ, le point  $K$  est un point de bifurcation; la symétrie axiale doit se casser bien qu'aucune discontinuité apparaisse dans le processus.

2) Celles où l'invariant du 3<sup>e</sup> degré doit être nul (théorie de Landau).

3) Celles qui ne font pas partie des deux classes précédentes !

Bien que nous n'ayons pas de théorie des hadrons (7) pouvons-nous deviner comment est brisée leur symétrie interne ? Certainement; Radicati et moi avons proposé pour ces brisures la classe 1.

Comme le rappelle le tableau II, chaque invariant du 3<sup>e</sup> degré permet de construire une algèbre symé-

(7) Les hadrons sont les particules — qu'on appelait encore récemment élémentaires, mais on en connaît plus de 200 — qui ont des interactions fortes (c'est-à-dire nucléaires). Les particules qui ne sont pas des hadrons sont le photon et les leptons :  $\mu, e$  = électrons et les neutrinos correspondants  $\nu_e, \nu_{\mu}$ . Seuls  $\mu$  et  $e$  ont une masse  $m_{\mu} = 206,768 m_e$ . Et  $m_{\mu}$  est plus petit que  $m_{\pi} \sim 274 m_e$ , le méson  $\pi$  étant le plus léger des hadrons; un seul hadron est stable : le proton  $m_p = 1\,836,151 m_e$ .

trique (éq. (3)) et les directions de cassure satisfont à (éq. (6),  $df = 0$ ) du tableau II :

$$x \vee x = \lambda x \quad (18)$$

c'est-à-dire sont des idempotents ( $\lambda \neq 0$ ) ou des nilpotents ( $\lambda = 0$ ) de cette algèbre. Le tableau III définit les directions de cassure de la symétrie interne des hadrons et donne les relations qu'elles satisfont dans les deux algèbres symétriques  $\vee, T$  considérées.

L'idée de symétrie interne a été introduite par Heisenberg [16], l'année de la découverte du neutron : neutron et proton sont les deux états du nucléon et l'interaction nucléaire entre nucléons est invariante par le groupe (8)  $SU(2)$  dit d'isospin. En 1953 il fallut agrandir à  $U(2)$  pour inclure l'hypercharge (9) [17], puis en 1961 l'agrandir à  $SU(3)$  (Gell-Mann [18] et Ne'eman [19]). Le passage à  $SU(6)$  en 1964, suggéré indépendamment par Gürsey et Radicati [20] et par Sakita [21] (voir aussi [22]), est d'une nature différente puisqu'il inclut à la fois le spin et les degrés de liberté interne (généralisant ainsi la théorie des supermultiplets de Wigner [23]); nous ne le considérons pas ici. Nous nous limiterons donc pour la période antérieure à 1972 à

$$G = SU(3) \times SU(3)$$

qui est le groupe de symétrie de l'algèbre des courants.

Nous savons nous déplacer dans l'espace, nous nous déplaçons malgré nous dans le temps, nous savons seulement nous orienter dans l'espace des symétries internes hadroniques, en observant les courants que nous fournit la nature dans l'espace à 16 dimensions de la représentation adjointe de  $SU(3) \times SU(3)$ . Les courants électromagnétiques et faibles (chargés) sont dans les directions  $q, c_{\pm}$  de cassure spontanée satisfaisant à

$$q \vee q = -q, \quad c_{\pm} \vee c_{\pm} = 0. \quad (19)$$

Nous renvoyons au tableau III pour les autres relations.

Je ne peux pas vous laisser en 1972, alors que tant de découvertes merveilleuses ont été faites depuis.

Les groupes d'invariances dont j'ai parlé ne dépendraient-ils pas des points de l'espace temps, comme le groupe de gauge de l'électromagnétisme ? Weinberg en 1967 [29] et Salam [30] ont montré qu'on pouvait alors unifier la théorie des couplages faibles (radioactivité) et électromagnétiques (comme Maxwell cent ans avant avait unifié la théorie de la lumière et les phénomènes électriques et magnétiques). Quoi de si différent que le photon  $\gamma$ , de masse nulle, et les bosons intermédiaires  $W^{\pm}, W^0$  de masse entre 40 GeV et 70 GeV (la masse du proton est de l'ordre d'un GeV), quanta d'une interaction violant la parité ? L'unification de ces couplages par une

(8)  $SU(n)$  est le groupe des matrices unitaire  $n \times n$  de déterminant 1;  $SU(n) \times SU(m)$  est le produit direct de deux tels groupes.

(9) Appelée alors étrangeté et dénotée  $S$  (strangeness).

TABLEAU III

Référence Michel et Radicati [24],  
voir aussi [25], [26], [27]

Groupe de symétrie de l'algèbre des courants  
SU(3) × SU(3) et P et C

(P = parité, C = conjugaison de charge).

Représentation adjointe de dimension 16, notée généralement (8, 1) ⊕ (1, 8). C'est l'espace des matrices 3 × 3 hermitiques de trace nulle : x\* = x, tr x = 0 pour chaque SU(3) et le produit ∨ correspondant se définit comme en (11). On a encore

$$x \vee x \vee x = x(x, x).$$

Les charges sont les intégrales, sur tout l'espace, des courants. Les directions remarquables sont notées :

- y hypercharge
  - q courant électromagnétique et charge électrique
  - c<sub>±</sub> courants faibles
  - z hypercharge faible
- } Cabibbo [28].

Ces directions satisfont les relations

$$y \vee y + y = 0, \quad q \vee q + q = 0,$$

$$c_{\pm} \vee c_{\pm} = 0, \quad z \vee z + z = 0$$

$$z = 2 c_+ \vee c_-$$

$$(y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right)$$

où θ est l'angle de Cabibbo ([28]).

La symétrie des particules est inférieure à celle des courants. Elle se produit essentiellement dans la représentation notée généralement (3, 3̄) ⊕ (3̄, 3). C'est l'espace de 18 dimensions réelles des matrices complexes 3 × 3. Action du groupe :

$$\forall u_1 \times u_2 \in \text{SU}(3) \times \text{SU}(3), \quad x \rightarrow u_1 x u_2^*.$$

L'algèbre symétrique, notée x<sub>T</sub>, est définie par

$$(x_T x) x^* = \det x^*$$

qui satisfait l'identité :

$$(x_T x)_T (x_T x) = x \det x.$$

Deux cas de brisure de symétrie remarquables de SU(3) × SU(3) sur le sous-groupe :

SU(3) diagonal, dans la direction x telle que

$$x_T x = \sqrt{\frac{2}{3}} x$$

SU(2) × SU(2) × U(1), dans la direction x telle que

$$x_T x = 0.$$

Le dernier cas correspond à la symétrie chirale : la masse m<sub>π</sub> des π est négligée. Dans le premier cas c'est la différence de masse entre les mésons π et K qui est négligée. La nature est plus complexe ; elle tient des deux cas à la fois tout en étant plus proche du cas chirale.

théorie de gauge est profonde et subtile : la théorie est renormalisable (t'Hooft, et autres [31], [32], [33], [34]), on peut donc tout calculer. Et elle prédit des courants neutres, découverts l'année suivante, en 1973. (Elle semble aussi prédire des monopôles magnétiques de masse = 137 m<sub>W</sub>, 137 étant l'inverse de la constante de structure fine atomique [35]) ; mais elle prédit aussi des courants faibles neutres violant l'étrangeté et qui ne sont pas vus. Comment les éviter ? En prédisant un nouveau nombre quantique le charme [36] qui agrandirait SU(3) en SU(4). Cela implique l'existence de nouvelles particules. Or on trouve en novembre 1974 le Ψ, le Ψ' (masse 3,105 et 3,684 GeV), puis le Ψ'' (4,150 GeV). Six mois après, la situation est encore confuse : il faut à nouveau agrandir le groupe G de symétrie interne des particules.

Pourtant le vieux rêve des physiciens de reconstruire tout l'univers matériel avec quelques entités (les 4 éléments, les atomes, ...) doit-il être abandonné ? Il y a un demi-siècle on pensait le faire avec les protons, les électrons et les photons. Et maintenant ? Dès 1964 Gell-Mann [37] proposaient 3 quarks et les 3 anti-quarks correspondant, portant des charges électriques fractionnaires ± 2/3, ± 1/3, ± 1/3. Les hadrons sont les baryons, formés de 3 quarks, et les mesons, formés d'un quark et d'un anti-quark. Mais les quarks auraient des propriétés paradoxales à moins qu'ils aient un nouveau degré de liberté la couleur [38], plus fondamental que les autres en un sens. Il prend 3 valeurs qu'on appelle bleu, blanc, rouge en français.

Le rapport R des sections efficaces de collision électron-positron

$$R = \frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)}$$

est de 2 environ vers 3 GeV. Son ordre de grandeur doit correspondre à la somme des carrés des charges des quarks. Or (2/3)<sup>2</sup> + (1/3)<sup>2</sup> + (1/3)<sup>2</sup> = 2/3 est trop petit. Mais R est bien trois fois cela. Vivent les couleurs ! Depuis six mois R a doublé (on le mesure vers 6 GeV actuellement). Si R continuait indéfiniment à croître, ce serait la catastrophe qui détruirait l'électrodynamique quantique, la meilleure théorie physique actuelle. Soyons optimiste. Et pour expliquer ce nouveau plateau de R, il suffit de doubler le nombre ordinaire de quarks, en passant de 3 à 6 ; on appelle ces degrés de liberté parfums (flavor en anglais). Le groupe de symétrie des particules est alors pour 6 parfums et 3 couleurs, soit

$$\text{SU}(3) \times \text{SU}(3) \times \text{SU}(3)_c \quad (20)$$

ou  $\text{SU}(6) \times \text{SU}(3)_c \quad (21)$

le SU(3)<sub>c</sub> étant certain pour la couleur.

Oui, la situation au 1<sup>er</sup> juillet 1975 paraît peut-être confuse. Et de plus que fait-on des 8 leptons dans tout cela ? On semble avoir besoin de leptons plus

lourds et peut-être est-on en train de les voir au Fermi Laboratory à Batavia.

Non seulement je terminerai sur une note optimiste, mais je vais essayer de vous parler des travaux actuels de Gürsey <sup>(10)</sup>. Ils sont d'une beauté extraordinaire. C'est un autre vieux rêve qui est peut-être en train de se réaliser. Les résultats expérimentaux de cette décennie nous permettront de juger.

Les Grecs pensaient que les quatre éléments étaient en relation subtile avec les quatre polyèdres réguliers connus; le tétraèdre : le feu, le cube : la terre, l'octaèdre : l'air et l'icosaèdre (formé de 20 triangles) : l'eau. Lorsque fut découvert le dodécaèdre (12 pentagones) tout s'écroulait, à moins de le relier à « l'éther supralunaire ». Képler avait non seulement découvert les lois du mouvement des planètes, mais avait inscrit et circonscrit leurs orbites avec les cinq polyèdres réguliers. Deux cents ans plus tard Herschell découvrait une nouvelle planète, Uranus, ... puis il y eut Neptune prédite par Adams et Leverrier...

Nous savons bien aujourd'hui que ces visions étaient préscientifiques. Mais ne peut-on pas espérer qu'au lieu de théories qu'on établit peu à peu par replâtrages successifs, on puisse faire un pas radicalement nouveau comme ce fut fait deux fois en ce siècle pour la relativité et la mécanique quantique

en utilisant alors la géométrie non Euclidienne et l'algèbre non commutative. Il faut relire le premier article de Dirac sur la mécanique quantique [39] reliant les crochets de Poisson à la non-commutation des opérateurs (le rapport étant  $i\hbar$ ) : C'est un pas essentiel d'avoir abandonné la commutativité. Ne doit-on pas au stade ultérieur abandonner l'associativité ? C'est ce qu'ont proposé Jordan, von Neumann et Wigner [40] partant d'une analyse de la mécanique quantique, ils ont montré que l'algèbre naturelle des observables quantiques était une *algèbre de Jordan*. Comme Monsieur Jourdain faisait de la prose, nous, les physiciens quantiques nous faisons des algèbres de Jordan, car pour les dimensions finies tout au moins, ces algèbres sont des algèbres de matrices dont le produit de Jordan  $\square$  (commutatif, mais non associatif) est simplement

$$A \square B = \frac{1}{2}(AB + BA).$$

Mais ces trois auteurs montrèrent qu'il y a aussi une algèbre de Jordan exceptionnelle, qui n'est pas de cette forme. On peut encore l'écrire avec des matrices  $3 \times 3$ , mais leurs éléments sont des octaves de Cayley. Dois-je vous rappeler le théorème de Hurwitz : les seules algèbres sur les nombres réels pour lesquels on puisse définir partout une division (excepté par zéro) sont  $\mathbb{R}$ , les réels eux-mêmes (dim 1),

TABLEAU IV

Les seules algèbres de division, réelles, de dimension finie sont :

—  $\mathbb{R}$  (les réels) et  $\mathbb{C}$  (les complexes) qui sont des corps commutatifs.

—  $\mathbb{Q}$  (les quaternions) qui est un corps non commutatif.

—  $\mathbb{O}$  (les octaves) dont le produit n'est pas associatif.

Les octaves de Cayley  $\mathbb{O}$  (plus grande algèbre finie de division sur  $\mathbb{R}$ ) et leurs extensions  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$ ,  $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{O}$ ,  $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$  sont notées respectivement  $H_k$ ,  $k = 1, 2, 4, 8$ ;  $\dim H_k = 8k$ . L'algèbre de Jordan exceptionnelle (réalisable par les matrices  $3 \times 3$  sur  $\mathbb{O}$ ) est notée  $J_E(\mathbb{O})$  et celles correspondant aux extensions  $J_E(H_k)$ .

Le groupe d'automorphisme  $G_k = \text{Aut } J_E(H_k)$  est un groupe de Lie exceptionnel,  $d_G$  est sa dimension et  $d_m$  celle de sa représentation réelle  $D_m$  de dimension minimum. La théorie de Gürsey harmonise deux brisures spontanées de la symétrie  $G_k$  sur les sous-groupes  $G_I$  et  $G_{II}$  respectivement.

I. La conjugaison de charge choisit une involution des octaves, son stabilisateur dans  $G_2 = \text{Aut } \mathbb{O}$  est  $SU(3)_c$  (couleur) et la brisure correspondante de  $G$  sur  $G_I$  donne la symétrie des quarks.

II.  $P_2(H_k)$ , le plan projectif (non arguésien !) sur  $H_k$  est une orbite de  $G_k$ , le stabilisateur de dimension  $d_G - 16k$ , est sous-groupe maximal de  $G_k$ .

III. En combinant les cassures I et II on aboutit à  $G_{III}$  le groupe de symétrie des gauges :

	$\mathbb{O}$	$J_E(H_1)$	$J_E(H_2)$	$J_E(H_4)$	$J_E(H_8)$
$G_k = \text{Aut } J_E(H_k)$	$G_2$	$F_4$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
$d_G = \dim(G_k)$	14	52	78	133	248
$d_m = \dim(D_m)$	7	26	$27 + \overline{27}$	56	248
$G_I$		$SU(3) \times SU(3)_c$	$SU(3) \times SU(3) \times SU(3)_c$	$SU(6) \times SU(3)_c$	$E_6 \times SU(3)_c$
$G_{II}$		$SO(9)$	$\overline{SO}(10) \times SO(2)$	$\overline{SO}(12) \times SO(3)$	$\overline{SO}(16)$
$G_{III}$		$SU(2) \times U(1)$	$\overline{SO}(4) \times U(1) \times U(1)$	$SU(4) \times SU(2) \times U(1)$	$\overline{SO}(10) \times SO(2)$

$\overline{SO}(n)$  = groupe de recouvrement de  $SO(n)$  i.e. groupe des spineurs. Tous les  $G_k$  ont leur rôle en physique,  $E_7$  semblant préféré : exemple le contenu

de  $D_m(E_7)$  est : 6 quarks à 3 couleurs, 6 anti-quarks à 3 couleurs,  $\frac{20}{2} = 10$  leptons de Dirac.

<sup>(10)</sup> J'ai eu la joie de les apprendre au cours du séjour que Feza Gürsey vient de faire à l'IHES pendant le mois de juin.

$\mathbb{C}$  les complexes (dim 2),  $\mathbb{Q}$  les quaternions de Hamilton (dim 4),  $\mathbb{O}$  les octaves de Cayley (dim 8). ( $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$  sont des corps,  $\mathbb{Q}$  n'est pas commutatif; le produit dans  $\mathbb{O}$  n'est pas associatif). Je noterai  $J_E(\mathbb{O})$  cette algèbre de Jordan exceptionnelle réelle; on peut considérer aussi l'algèbre complexifiée  $J_E(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})$  et même les extensions quaternioniques  $J_E(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{O})$  et octonioniques  $J_E(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})$ .

Je vous disais tout à l'heure : *un bon formalisme suggère des expériences*; j'ajouterais ici : *un excellent formalisme suggère des découvertes*. Il faut relire encore l'article de Dirac de 1932 [41] où, découvrant la conjugaison de charge, il déduit de son équation l'existence de l'anti-proton et de l'anti-électron. Le premier paragraphe commence ainsi « The steady progress of physics requires for its formulation a mathematics that gets continually more advanced », et se termine par « It seems likely that this process of increasing abstraction will continue in the future and that advance in physics is to be associated with a continual modification and generalization of the axioms at the base of the mathematics rather than with a logical development of any one mathematical scheme on a fixed foundation ».

Pourtant depuis 1934 les physiciens n'ont rien fait des algèbres exceptionnelles  $J_E$  qui avaient été découvertes à partir de réflexions sur la physique. Mais les mathématiciens ne sont pas restés inactifs. E. Cartan avait montré dans sa thèse qu'en dehors des groupes de matrices unitaires, orthogonales et symplectiques, il existait cinq groupes de Lie simples exceptionnels  $G_2$ ,  $F_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ . Il savait que  $G_2$  était le groupe d'automorphisme de  $\mathbb{O}$ .

Depuis 1950 on a découvert que les quatre autres étaient le groupe d'automorphismes de  $J_E(\mathbb{O})$ ,

$$J_E(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}), \quad J_E(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{O}) \quad \text{et} \quad (J_E(\mathbb{Q} \otimes \mathbb{O}))$$

respectivement (voir tableau IV).

Comme vous le voyez les matrices  $3 \times 3$ , ont un grand rôle dans cette conférence.

Je ne peux pas dans les deux minutes qui me restent vous décrire la théorie de Gürsey [42], [43], je me contenterai de faire la liste de ses succès. La non-associativité des octaves est liée à l'emprisonnement des quarks : on ne peut les observer à l'état de particules <sup>(11)</sup>. La conjugaison de charge casse la symétrie des octaves de  $G_2$  à  $SU(3)_c$ . En choisissant  $E_6$  ou  $E_7$  la symétrie des hadrons est (20) ou (21). Les quarks, les anti-quarks et les leptons forment une représentation réelle irréductible de  $E_6$  ou  $E_7$  de basse dimension. Il n'y a pas de courants neutres faibles violant l'hypercharge et la valeur de l'angle de Cabibbo est prédite. Il y a plusieurs mécanismes d'une beauté féérique pour casser en plusieurs fois une si grande symétrie (voir tableau IV), et les idempotents et nilpotents des algèbres symétriques y jouent leur rôle. Pas d'empirisme. L'esthétique est achevée <sup>(12)</sup>. Si vous ne me croyez pas, me disant que tout cela est illusion, je vous répondrai *Peut-être, mais aimez-vous vivre sans illusions ?*

<sup>(11)</sup> Il semble bien que les quarks sont des concepts complètement nouveaux. S'ils sont des particules ordinaires, comme les molécules formées d'atomes, les atomes d'électrons et d'un noyau, les noyaux de nucléons, les nucléons de quarks, les quarks de... etc..., je quitterai ce domaine de la physique !

<sup>(12)</sup> Mais la physique ne l'est pas ! Comment est violé CP ?

### Bibliographie

- [1] CURIE, P., *Journal de Physique Théorique et Appliquée* 3<sup>e</sup> série 3 (1894) 393.
- [2] JACOBI, C. G. J., *Poggendorf Ann. Phys. Chim.* 33 (1834) 229.
- [3] CHANDRASEKHAR, S., *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (Yale University Press) 1969.
- [4] BARDEEN, J. M., *Les Houches* (Gordon and Breach, 1973) 1972, p. 241.
- [5] BERTIN, G., RADICATI, L. A., MICHEL, L. (à paraître).
- [6] OSTRICKER, J. P., PEEBLES, P. J. E., *Astrophys. J.* 186 (1973) 467.
- [7] KASTLER, D., MEBKHOUT, M., LOUPIAS, G., MICHEL, L., *Commun. Math. Phys.* 27 (1972) 195.
- [8] MICHEL, L., Some mathematical models of symmetry breaking Application to particle physics (to appear in *Proceedings of 1974 Warsaw Symposium in Mathematical Physics*).
- [9] KASTLER, D., *Equilibrium states of matter and operator algebras* (Convegno di C\* algebre), Roma (1975) (to be published).
- [10] MICHEL, L., *C. R. Hebd. Séan. Acad. Sci.* 272 (1971) 433, pour plus de détails : « Proceedings 3rd Gift seminar in Theoretical Physics » p. 49-131, Madrid 1972.
- [11] DE GENNES, P. G., *The physics of liquid crystals* (Clarendon Press Oxford) 1974, p. 48.
- [12] DE GENNES, P. G., *Mol. Cryst. Liquid Cryst.* 12 (1971) 193.
- [13] LANDAU, L., *Phys. 2. Sovejt.* 11 (1973) 545.
- [14] LANDAU, L., LIFSCHITZ, E. M., *Statistical Physics* (traduit du russe aux éditions Mis., Moscou).
- [15] LUBARSKII, S. Ya., *Application of group theory in physics*, Chapitre VII.
- [16] HEISENBERG, W., *Z. Phys.* 77 (1932) 1.
- [17] GELL-MANN, M., *Phys. Rev.* 92 (1953) 833. NAKANO, T., NISHIJIMA, K., *Prog. Theor. Phys.* 10 (1953) 587.
- [18] GELL-MANN, M. G., Calif. Inst. Techn. Synchrotron Lab. Report CTSL-20 (1961) unpublished et dans l'anthologie *The Eightfold way* éditée par Gell-Mann et Ne'eman (Benjamin, New York) 1964.
- [19] NE'EMAN, Y., *Nucl. Phys.* 26 (1961) 222.
- [20] GÜRSEY, F., RADICATI, L. A., *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964) 173.
- [21] SAKITA, B., *Phys. Rev.* 136 (1964) 1756.
- [22] GELL-MANN, M., *Phys.* 1 (1964) 63 (l'algèbre des courants est introduit et une première mention est faite de  $SU(6)$ ).
- [23] WIGNER, E. P., *Phys. Rev.* 51 (1937) 27.
- [24] MICHEL, L., RADICATI, L., *Ann. Phys.* 66 (1971) 758.
- [25] MICHEL, L., RADICATI, L., Proceedings of the fifth Coral Gables Conference, *Symmetry Principles at High Energy*, p. 19 (W. A. Benjamin Inc., New York) 1968, p. 19.
- [26] MICHEL, L., RADICATI, L., Mendeleev Symposium, *Acta Acad. Sci. Torino Il Sci. Fis. Mat. Natur.* p. 377-389 (1971).
- [27] MICHEL, L., RADICATI, L., *Evolution of particle physics dedicated to E. Amaldi* (Academic Press New York) 1970, p. 191.
- [28] CABIBBO, N., *Phys. Rev. Lett.* 10 (1963) 531.
- [29] WEINBERG, S., *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967) 1264.
- [30] SALAM, A., *Proc. Eight Nobel Symposium* (Wiley New York) 1968.
- [31] T'HOOFT, G., *Nucl. Phys.* B 33 (1971) 173, *ibid.* B 35 (1971) 167.

- [32] T'HOOFT, G., VELTMAN, M., *Nucl. Phys. B* **44** (1972) 189, *ibid.* **B 50** (1972) 318.
- [33] LEE, B. W., *Phys. Rev. D* **5** (1972) 823.
- [34] LEE, B. W., ZINN-JUSTIN, J., *Phys. Rev. D* **5** (1972) 3121, 3137, 3155, **D 7** (1973) 1049.
- [35] T'HOOFT, G., *Nucl. Phys. B* **79** (1974) 276.
- [36] GLASHOW, S. L., ILLIOPOULOUS, J., MAIANI, L., *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1285.
- [37] GELL-MANN, M., *Phys. Lett.* **8** (1964) 214.
- [38] HAN, M. Y., NAMBU, Y., *Phys. Rev.* **139B** (1965) 1006, NAMBU, Y., HAN, M. Y., *Phys. Rev. D* **10** (1974) 674.
- [39] JORDAN, P., VON NEUMANN, J., WIGNER, E. P., *Ann. Math.* **35** (1934) 29.
- [40] DIRAC, P. A. M., *Proc. R. Soc. A* **109** (1925) 642.
- [41] DIRAC, P. A. M., *Proc. R. Soc. A* **130** (1930) 60.
- [42] GÜRSEY, F., Algebraic method and quark structure, to be published in *Proceedings of the Kyoto Conference on Mathematical Problems of Theoretical Physics*, Yale preprint.
- [43] GÜRSEY, F., RAMOND, P., SIKIVIE, P., A six quark model for the suppression of  $\Delta S = 1$  neutral currents ; Yale preprint.

Cette liste de références est certainement incomplète. Si la référence annonçant la découverte des courants neutres (1973) et les trois annonçant la découverte des  $\Psi$  (1974) avaient été ajoutées, cela aurait doublé le nombre d'auteurs cités !