

A propos des brisures spontanées de symétrie

Louis MICHEL

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
Bures-sur-Yvette (France)

C'est Goldstone qui avait été pressenti pour donner ici une revue sur le sujet des brisures spontanées de symétrie. Je suis certain que, comme moi, vous regrettez tous qu'il n'ait pas pu accepter et que j'ai eu à le remplacer.

Ayant fait une revue sur ce sujet[†] au 1er Symposium Européen de physique mathématique à Varsovie [1] en mars 1974, et devant parler de ce sujet dans une semaine au colloque de la Société Française de Physique à Dijon [2] je ne voudrais pas me répéter ici. Cet exposé ne sera donc pas systématique; il sera incomplet et partial puisque ni Goldstone ni Higgs ne seront cités. Il vous présentera quelques idées très générales, en insistant plus sur leur aspect mathématique, et en citant simplement leurs applications physiques.

1. Un exemple historique.

Commençons par un exemple, que je crois être le premier exemple historique de symétrie brisée. Il fut découvert par Jacobi [3] en 1834 en considérant une masse m de fluide incompressible, isolé, en cohésion par son attraction gravitationnelle, et soumis à un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe (Ox_3) , de vitesse angulaire constante Ω_0 . Lorsque $\Omega_0 = 0$, la figure d'équilibre est une

[†] Le texte de la conférence de Varsovie avait d'ailleurs été distribué à tous les participants du 3^{ème} Colloquium, l'an dernier à Marseille.

TABLEAU 1.

Masse fluide m , vitesse angulaire constante Ω_0 autour de Ox_3 . La surface libre du liquide incompressible est donnée par l'équation

$$\sum_{i=1}^3 (x_i/a_i)^2 = 1 \quad (1)$$

On définit les intégrales

$$A^{(k)} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{u^k du}{\sqrt{D}}, \quad A_i^{(k)} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{u^k du}{\sqrt{D}(a_i^2+u)},$$

$$A_{ij}^{(k)} = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{u^k du}{\sqrt{D}(a_i^2+u)(a_j^2+u)}$$

où $D = (a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)$. Noter que $A_1^{(0)} + A_2^{(0)} + A_3^{(0)} = 2$.

L'équilibre hydrostatique dans le repère tournant s'écrit

$$\frac{p}{\rho} = V(\vec{x}) + \frac{1}{2} \Omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2) + C^{te} \quad (2)$$

où p est la pression, ρ la densité : $m = 4\pi a_1 a_2 a_3 \rho/3$ et l'énergie potentielle

$$V(\vec{x}) = \pi G \rho (A^{(0)} - \sum_{i=1}^3 A_i^{(0)} x_i^2) \quad (3)$$

G est la constante de gravitation et $\Omega = \Omega_0 / \sqrt{\pi G \rho}$ est sans dimension. En écrivant que $p = 0$ sur la surface, la comparaison de (1) et (2) donne les conditions d'équilibre

$$(\Omega^2 - 2A_1^{(0)}) a_1^2 = (\Omega^2 - 2A_2^{(0)}) a_2^2 = -2A_3^{(0)} a_3^2 \quad (4)$$

La première égalité peut encore s'écrire

$$(a_1^2 - a_2^2)(\Omega^2 - 2A_{12}^{(1)}) = 0 \quad (5)$$

Solutions à symétrie axiale : $a_1^2 - a_2^2 = 0$

(il en existe deux pour chaque $\Omega < 0,44933\dots$ trouvées par Mac Laurin)

Solutions à trois axes inégaux : $\Omega^2 - 2A_{12}^{(1)} = 0$

(il en existe une pour chaque $\Omega < 0,37230\dots$ trouvée par Jacobi)

Le point de bifurcation satisfait $a_1^2 - a_2^2 = 0$ et $\Omega^2 - 2A_{12}^{(1)} = 0$ et (de (4))

$a_1^2 a_2^2 A_{12}^{(0)} = a_3^2 A_3^{(0)}$ soit $\Omega = 0,37230\dots, \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} = 0,582724\dots$.

sphère; pour un certain domaine de valeur de Ω_0 , il existe un équilibre statique dans le repère tournant, la surface d'équilibre du liquide étant un ellipsoïde de révolution aplati. Le Tableau 1 donne les équations, en fonction de Ω_0 , satisfaites par les longueurs des axes principaux a_1, a_2, a_3 de l'ellipsoïde. Cela donne une assez bonne approximation de l'aplatissement de la Terre. Mais ces mêmes équations ont aussi une autre famille de solutions découvertes par Jacobi. Elles sont asymétriques : $a_1 \neq a_2$, l'ellipsoïde ayant trois axes inégaux. La solution commune à ces deux familles est un "point de bifurcation". Ce qui est remarquable c'est sa généralité. D'autres familles de solutions (non statique) avec courants de convection partent du même point. Si on utilise comme paramètre cinématique sans dimension t

$$t = \frac{\text{Energie de rotation}}{|\text{Energie potentielle}|} \quad (1)$$

le théorème du viriel impose pour tout système en interaction gravitationnelle

$$0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

Pour la sphère $t = 0$ ($\Omega_0 = 0$) ; le point de bifurcation apparaît pour $t = 0,1375$. Si le fluide n'est pas incompressible, la densité ρ (pour les solutions statiques dans le repère tournant) est constante sur des ellipsoïdes concentriques dont la symétrie axiale disparaît pour cette même valeur de $t = 0,1375\dots$, quelle que soit l'équation d'état du fluide, comme viennent de le montrer Bertin et Radicati [4] en utilisant une remarque mathématique de Roberts [5].

Quand l'ellipsoïde a trois axes inégaux, on obtient pour Ω_0 ou t fixé, à un instant donné, toute la famille de solution à partir de l'une d'elle en faisant tourner l'ellipsoïde autour de l'axe Ox_3 , qui est l'axe de symétrie du problème. Cette situation est générale.

2. L'action du groupe de symétrie sur l'ensemble des solutions.

Quand un problème physique a un groupe de symétrie G , ce groupe agit sur l'ensemble M des solutions du problème. Ces points de M , invariants par G

forment un sous-ensemble M^G (en général fermé) et représentent les solutions qui ont aussi la symétrie G . Chaque autre solution $m \in M$ est invariante pour un sous-groupe G_m de G (appelé petit groupe ou stabilisateur ou groupe d'isotropie de m). Nous notons $G(m)$ la famille des solutions transformées de m par G . On dit que $G(m)$ est une orbite du groupe. Si deux points m' et m sont sur la même orbite, il existe alors $g \in G$ (pas forcément unique!) tel que $m' = gm$ et on vérifie que les stabilisateurs sont conjugués i.e.

$$G_{m'} = gG_m g^{-1} \quad (3)$$

La réciproque n'est pas vraie; si deux points x et y ont des stabilisateurs conjugués (3), x et y ne sont pas nécessairement sur la même orbite, mais par définition, ils sont sur le même stratum; un stratum est ainsi l'union de toutes les orbites d'un même type. On notera $S(x)$ le stratum de x . Il y a un ordre partiel naturel sur les classes de conjugaison des stabilisateurs qui apparaissent dans l'action de G sur M : (on note $[G_x]$ celle de G_x) . $[G_x] < [G_y]$ si G_x est conjugué d'un sous-groupe de G_y .

L'ensemble M des solutions est très différent en général pour le même problème traité en mécanique classique ou quantique. Considérez par exemple le problème de Kepler dans l'espace à 3 dimensions (potentiel central en $\frac{k}{r}$); dans le cas classique aucune solution n'a la symétrie $O(3)$, car la nécessité d'avoir des conditions initiales détruit cette symétrie; dans le cas quantique tous les états de moment orbital $\ell = 0$ ont la symétrie sphérique. Pour les $\ell > 0$, à chaque orbite d'état pur (représentables par un vecteur d'état) on peut faire correspondre un "mélange" (représentable par un matrice densité) en intégrant sur l'orbite, ce qui est encore un état invariant.

Lorsque la symétrie est brisée, savoir laquelle des solutions d'une orbite est choisie dans le phénomène qu'on étudie, est d'un intérêt secondaire, surtout pour les symétries spatiales; dans ce cas, le choix est dû à une irrégularité (par exemple germe cristallin) ou même parfois à une fluctation statistique. Ce qui

est important c'est de pouvoir prévoir en quel sous-groupe la symétrie peut être brisée (sans résoudre complètement le problème!). C'est ce qui a été fait en cristallographie à la fin du siècle dernier. Les interactions entre les ions ou les atomes constituant un cristal sont invariantes par déplacement euclidien (translation et rotation), mais le cristal (même supposé parfait et indéfini) n'est invariant que pour un sous-groupe du groupe Euclidien $E(3)$. Il y a 230 classes de groupes cristallographiques.*) Parfois et de plus en plus, pour un problème de mécanique statistique classique ou quantique, ainsi que pour un problème de mécanique quantique on peut prévoir l'ensemble des stabilisateurs qui apparaîtront pour l'action de G dans l'espace des états et donc comment peut se casser la symétrie. La revue la plus récente de cette question, dans le cadre général des C^* -algèbres a été faite par D. Kastler [6]; je vous y renvoie. J'avais étudié avec lui [7] le cas # où G est le groupe Euclidien $E(3)$. En plus des classes de groupes cristallographiques nous avons trouvé une infinité dénombrable de "classes de symétrie" que nous avons décrites (à une conjugaison près dans $InL_+(3,R)$)*. Bien que cette classification rejettent beaucoup de sous-groupes fermés de $E(3)$ comme stabilisateurs d'états, il faut cependant noter que les stabilisateurs possibles forment un ouvert dans l'espace compact des sous-groupes fermés de $E(3)$ #.

Tout en restant général, nous allons particulariser un peu !

3. Principe variationnel et invariance par un groupe compact G .

C'est une situation qu'on rencontre assez souvent en physique. Il s'agit

*) Comme on ne distingue pas, de ce point de vue des symétries, les cristaux de tailles différentes, les classes de conjugaisons sont dans le groupe $InL_+(3,R)$: le groupe linéaire inhomogène à 3 dimension, pour les opérations homogènes de déterminant positif. Dans $InL(3,R)$ il n'y aurait que 219 classes.

La réf. [1] contient un bref résumé

En effet, les sous-groupes fermés d'un groupe localement compact forment un espace topologique compact cf. Bourbaki VI.8, §5, généralisant un travail de Macbeath et Swierkowski.

de trouver les extrema d'une fonction f , réelle, différentiable[†] définie sur une variété M et invariante par G . Appelons \mathfrak{F} l'ensemble de telles fonctions. Si m est un extremum de f , tous les points de $G(m)$ le sont aussi. J'ai appelé "critiques" les orbites qui sont des orbites d'extrema pour toutes les fonctions $\in \mathfrak{F}$. Ces orbites sont faciles à caractériser [8]. Ce sont celles qui sont isolées dans leur stratum (c'est-à-dire, il y a un voisinage qui contient l'orbite critique et qui n'en contient aucune autre du même type). Ce résultat découle du fait que le gradient d'une fonction $f \in \mathfrak{F}$ en tout point m est orthogonal à l'orbite et tangent au stratum. Le physicien qui a choisi un modèle -donc une fonction à varier - et qui a trouvé ainsi la cassure de symétrie qu'il cherchait ne doit pas croire que son modèle est vérifié si l'orbite de solutions qui lui convient est une orbite critique. Il aurait pu partir de n'importe quelle autre fonction (avec le même groupe de symétrie G) et il a simplement vérifié un théorème général. De telles orbites critiques jouent souvent un grand rôle. C'est ce que Radicati et moi avons vérifié pour les brisures de symétrie interne des hadrons ([9], [10], [11]); pour des exemples pour le groupe $SO(4)$, pris à la relativité générale, ou à l'hydrodynamique, voir [12].

Naturellement, les physiciens sont intéressés par la nature des extrema. Pour cela il faut former en chaque point $m \in M$, le Hessian *) d^2f de la fonction f .

En chaque point $m \in M$, le petit groupe G_m agit linéairement sur le plan tangent $T_m(M)$ par la représentation linéaire $g \rightarrow D_m(g)$. Le Hessian est invariant par G_m , i.e. $\forall g \in G_m, d^2f = D_m(g) d^2f D_m(g)^T$. Cela implique en général une certaine dégénérescence de son spectre. De plus le noyau de d^2f , $\text{Ker } d^2f$,

† Pour éviter des difficultés techniques nous les prenons C^∞ ; la plupart des résultats sont un peu plus généraux.

* Avec un choix de coordonnées x^i , les coordonnées du gradient sont $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ et le Hessian est représenté par la matrice réelle symétrique $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$

est le plan tangent en m à l'orbite $G(m)$, $T_m(G(m)) \subset T_m(M)$. L'extremum est un minimum si $d^2f \geq 0$. Admettons que la fonction f dépendent de paramètres extérieurs (en thermodynamique il s'agit de p, T ; dans l'exemple de la section 1, il s'agit de t ou Ω_0 , cf. [4]). L'équilibre est donné par $df = 0$, $d^2f \geq 0$ et l'apparition d'un point de bifurcation par " $\text{Ker } d^2f$ strictement plus grand que $T_m(G_m)$."

4. Théorie de Landau des changements de phase du 2^e ordre.

La situation générale que nous venons de décrire est un cas particulier de la théorie des catastrophes de Thom [13], théorie qui a classé les types de singularités en l'absence de groupe G . Son extension à G compact est en cours. D'autre part, la théorie de Morse [14] impose des relations entre la nature des extrema de f et les nombres de Betti de M en l'absence de G . Son extension "équivariante" pour G compact est possible [15] et je suis actuellement intéressé par ses applications à la physique[†]. Un des buts de la théorie de Landau [17], [18] est de prédire quelle brisure spontanée de symétrie peut se produire dans un cristal par un changement de phase du second ordre. C'est une excellente illustration de la situation générale que nous venons de décrire. Le groupe cristallographique G n'est pas compact, mais ses représentations irréductibles réelles sont toutes de dimension finie et orthogonales (car G a un sous-groupe invariant abélien d'index fini); f est le potentiel thermodynamique, M serait l'Hilbert $L^2(G)$ mais en fait on considère un sous-espace \mathcal{E} de représentation irréductible et f est minimum à l'origine pour la phase la plus symétrique. Notons par (x, x) le produit scalaire orthogonal sur \mathcal{E} . Si en réduisant (sur les réels) la représentation de G sur $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ on retrouve la représentation sur \mathcal{E} , nous obtenons un homomorphisme G -équivariant

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\nu} \mathcal{E}$$

[†] Un des premiers et bel exemple de l'application de la théorie de Morse à la physique est la remarque de Van Hove [16] sur les singularités de la densité des fréquences élastiques dans un cristal.

qui définit une algèbre symétrique $\#$ (en général non associative) sur \mathcal{E} : nous notons simplement $\vee(x \otimes y) = x \vee y$. Notons Δ_x l'opérateur linéaire sur \mathcal{E} défini par $\Delta_x y = x \vee y$ et remarquons que $\text{tr } \Delta_x = 0$ sinon $x \rightarrow \text{tr } \Delta_x$ serait une forme linéaire équivariante sur \mathcal{E} , ce qui est impossible si la représentation irréductible de G sur \mathcal{E} n'est pas triviale. Nous pouvons alors démontrer le

Lemma. Tout polynôme du 3^e degré G -invariant sur \mathcal{E} ne peut être minimum qu'à l'origine.

L'invariance par G interdit au polynôme d'avoir un terme linéaire en x . Le terme constant est sans importance. Soit

$$f = \frac{\alpha}{2} (x, x) + \frac{\beta}{3} (x \vee x, x) \quad , \quad \beta \neq 0 \quad (4)$$

ce polynôme. Nous calculons alors aisément

$$df = \alpha x + \beta x \vee x \quad (5)$$

$$d^2 f = \alpha I + 2\beta \Delta_x \quad (6)$$

L'origine $x = 0$ est un extremum. Une autre orbite d'extremum est donné par

$$x \vee x = -\frac{\alpha}{\beta} x \quad (7)$$

c'est-à-dire x est un idempotent de l'algèbre symétrique. Remarquons que lorsque f est extremum ($df = 0$), x est vecteur propre de $d^2 f$

$$d^2 f x = \alpha x + 2\beta x \vee x = -\alpha x \quad (8)$$

D'autre part,

Par exemple, pour l'exemple de la section 1, les quadrupoles, c'est-à-dire les matrices 3×3 réelles symétriques de trace nulle forment la représentation irréductible (réelle) de dimension 5 de $O(3)$: $Q_1 \vee Q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1) - I \frac{2}{\sqrt{3}}(Q_1, Q_2)$ où le produit scalaire a été défini par $(Q_1, Q_2) = \frac{1}{2} \text{tr } Q_1 Q_2$. Remarquons que pour tout Q , $Q \vee Q \vee Q = Q(Q, Q)$.

$$\text{tr } d^2f = \alpha n \quad , \quad n = \dim \mathcal{E} \quad (9)$$

La comparaison de (8) et (9) montre que pour $x \neq 0$, d^2f a des valeurs propres de signe opposé et donc ne peut satisfaire $d^2f \geq 0$ ce qui prouve le lemme (pour $\alpha > 0$, $x = 0$, $df = 0$, $d^2f = \alpha I > 0$).

Dans un développement limité du potentiel thermodynamique f au voisinage de zéro, en faisant varier p, T continûment on ne pourra donc pas passer d'un minimum à zéro (phase invariante par G) à un minimum pour $x \neq 0$ si les invariants du 3^e ordre ne sont pas nuls. C'est une des conditions nécessaire de la théorie de Landau.

On qualifie d'"actives" les représentations réelles irréductibles d'un groupe cristallographique G satisfaisant la théorie de Landau. Récemment Mozrymas a trouvé des relations d'équivalence intéressantes entre représentations actives[†] [12]. La théorie de Landau s'applique en dehors de la cristallographie et même pour l'exemple de la section 1 comme l'ont montré Bertin et Radicati [4] dans la cassure de la symétrie $O(2)$.

5. Les idempotents des algèbres symétriques G -invariantes.

Il ne faudrait pas croire que les invariants du 3^e ordre, et plus généralement, les algèbres symétriques G -invariantes qui permettent de les former ne jouent pas un grand rôle dans les brisures spontanées de symétrie. Au contraire, comme Radicati et moi l'avons constaté, les idempotents et nilpotents des algèbres symétriques interviennent dans les brisures de symétrie interne des hadrons. Le tableau 2 donne les principales relations que nous avons observées. Ces résultats ont été généralisés par plusieurs auteurs [21 à 25], dont le prochain conférencier, Prof. Gürsey.

Il est peut-être téméraire de vouloir comprendre les brisures des symé-

[†] Nous travaillons ensemble pour compléter explicitement les prédictions de brisures symétriques de la théorie de Landau.

TABEAU 2 - Référence Michel et Radicati [11], voir aussi [9], [10].

Groupe de symétrie de l'algèbre des courants

$SU(3) \times SU(3)$ et P et C (P = parité, C = conjugaison de charge)

Représentation adjointe de dimension 16, notée généralement $(8,1) \oplus (1,8)$. C'est l'espace des matrices 3×3 hermitiques de trace nulle : $x^* = x$, $\text{tr } x = 0$ pour chaque $SU(3)$ et le produit \vee correspondant se définit comme pour les quadrupoles (2^{ème} note de la section 4). On a encore $x \vee x \vee x = x(x,x)$.

Les charges sont les intégrales, sur tout l'espace, des courants. Les directions remarquables sont notées.

y	hypercharge	
q	courant électromagnétique et charge électrique	
c_{\pm}	courants faibles	}
z	hypercharge faible	

Cabibbo [26]

Ces directions satisfont les relations

$$y \vee y + y = 0, \quad q \vee q + q = 0, \quad c_{\pm} \vee c_{\pm} = 0, \quad z \vee z + z = 0$$

$$z = 2c_{+} \vee c_{-}$$

$$(y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta) \text{ où } \theta \text{ est l'angle de Cabibbo ([26]) .}$$

La symétrie G_0 des particules est inférieure à celle des courants. Elle se produit essentiellement dans la représentation notée généralement $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$. C'est l'espace de 18 dimensions réelles des matrices complexes 3×3 . Action du groupe: $\forall u_1 \times u_2 \in SU(3) \times SU(3)$, $x \rightarrow u_1 x u_2^*$. L'algèbre symétrique, noté T est définie par

$$(x_T x) x^* = \det x^*$$

qui satisfait l'identité :

$$(x_T x)_T (x_T x) = x \det x$$

Deux cas de brisure de symétrie remarquables de $SU(3) \times SU(3)$ sur le sous-groupe G_0 :

$SU(3)$ diagonal, dans la direction x telle que $x_T x = \sqrt{\frac{2}{3}} x$

$SU(2) \times SU(2) \times U(1)$, dans la direction x telle que $x_T x = 0$.

Le dernier cas correspond à la symétrie chirale : la masse m_{π} des π est négligée. Dans le premier cas c'est la différence de masse entre les mésons π et K qui est négligée. La nature est plus complexe; elle tient des deux cas à la fois tout en étant plus proche du cas chirale.

tries internes des particules fondamentales tant que nous n'avons pas une théorie, mais il est possible que cette théorie ne soit découverte que lorsque nous aurons mieux compris le mécanisme des brisures de ces symétries internes. C'est ce qui semble se passer actuellement en interprétant ces symétries internes comme symétrie de jauge (cf. la conférence d'Illiopoulos) ou peut-être même comme super-symétrie (cf. la conférence d'O'RaiFeartaigh). Peut-être même sommes nous très avancés dans cette voie comme va vous le montrer beaucoup plus éloquemment le prochain conférencier, le professeur GURsey.

Pour terminer je vous signale un tout autre domaine où les idempotents de ces algèbres symétriques jouent le rôle essentiel dans la brisure de symétrie : C'est la théorie des bifurcations, comme vient de me l'apprendre le pré-tirage "Group Representation Theory and Branch Points of non linear functional Equations" (University of Minnesota) de D.H. Sattinger actuellement en visite à l'I.H.E.S.. Dans les exemples qu'il choisit il est amené à chercher les idempotents $x \vee x = \lambda x$.

REFERENCES

- [1] L. Michel, Some mathematical models of symmetry breaking. Application to particle physics, (to appear in "Proceedings of 1974 Warsaw Symposium in Mathematical Physics").
- [2] L. Michel, Les brisures spontanées de symétrie en physique (à paraître dans le Journal de Physique).
- [3] C.G.J. Jacobi, Poggendorf Annalen de Physik und Chimie 33 (1834) 229.
- [4] G. Bertin, L.A. Radicati, The bifurcation from the Mac Laurin to the Jacobi sequence as a second order phase transition. Preprint Scuola Normale Superiore (Pisa).
- [5] P.H. Roberts, Astrophys. J. 136 (1962) 1108.
- [6] D. Kastler, Equilibrium states of matter and operator algebras, Convegno di C*-algebra, Roma (1975) (to be published).
- [7] D. Kastler, G. Loupias, M. Mebkhout, L. Michel, Comm. math. Phys. 27, (1972) 195.
- [8] L. Michel, C.R. Acad. Sc. Paris 272 (1971) 433; pour plus de détails : "Proceedings 3rd Gift seminar in Theoretical Physics", p. 49-131, Madrid 1972.
- [9] L. Michel, L. Radicati, Proceedings of the fifth Coral Gables Conference, "Symmetry Principles at High Energy", p. 19, W.A. Benjamin Inc., New York, (1968).
- [10] L. Michel, L. Radicati, Mendeleev Symposium, Acti Accad. Sci. Torino II Sci. Fis. Mat. Natur., p. 377-389 (1971).
- [11] L. Michel, L. Radicati, Ann. of Phys. 66, 758-783 (1971).
- [12] F. Pegoraro, Comm. math. phys. 42 (1975) 41.
- [13] R. Thom, Modèles Mathématiques de la Morphogénèse, Collection 10/18, Union générale d'Éditions, Paris 1974. Cours Enrico Fermi 1973, à publier.
- [14] J. Milnor, Morse Theory, Annals of Mathematical Studies, N° 51, Princeton University Press, est probablement un des meilleurs cours sur cette théorie.
- [15] A.G. Wassermann, Topology 8 (1969) 127.

- [16] L. Van Hove, Phys. Rev. 89 (1953) 1189.
- [17] L. Landau, Phys. 2. Sovejt. 11 (1973) 545.
- [18] L. Landau, E.M. Lifschitz, Statistical Physics, § 136 (traduit du russe aux Editions Mir, Moscou).
- [19] J. Mozrzymas, Preprint Instytut Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Wrocławskiego, n° 306.
- [20] L. Michel, L. Radicati, Evolution of particle physics, p. 191 (dedicated to E. Amaldi) academic Press New York (1970).
- [21] L. Abellanas, J. Math. Phys., 13, 1064 (1972).
- [22] Pegoraro and J. Subba Rao, Nucl. Phys. B44, 221 (1972).
- [23] C. Darzens, Ann. Phys. 76, 236 (1973).
- [24] R.E. Mott, N. Phys. B84 (1975) 260.
- [25] S. Eliezer, Phys. Let. 53B (1974) 86.
- [26] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 531.