Комнати 525

THEORIE DES GROUPES ET PARTICULES ELEMENTAIRES

Louis MICHEL

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91 Bures-sur-Yvette, France

This text has been written while the author worked at Brookhaven National Laboratory, Upton, New-York 11973, U.S.A.

This is the first draft of the text of a conference I have been invited to give at the International Congress of Mathematicians, Moscow, on August 18, 1966. I hope that friendly critics will help me to improve this text and reduce it by half !

Moins de trois ans après la création de la mécanique quantique[1] paraissait le livre de H. Weyl "Gruppentheorie und quantenmechanik (Huzel Leipzig 1928)[2] suivi par celui de E.P. Wigner "Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik" der Atomspektren"(Vieweg, Braunschweig 1931)[3] et celui de Van der Warden "Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik" (Springer, Berlin 1932)[4].

Non seulement deux des auteurs étaient des mathématiciens, mais une partie importante des travaux du troisième sur ce sujet avait été faite en collaboration avec J. Von Neumann[5]. Ces trois livres traitaient surtout des spectres atomiques.

Donnons un exemple banal simplifiant à l'extrême : seule la partie paire $f_+(\vec{r}) = 1/2(f(\vec{r}) + f(-\vec{r}))$ (respectivement $f_+(r_1,r_2) = 1/2(f(r_1,r_2) + f(r_2,r_1))$) de l'intégrand contribue à l'intégrale sur tout l'espace $\int f(\vec{r})\, d^3\vec{r}$ (resp. $\int f(\vec{r}_1,\vec{r}_2) d^3\vec{r}_1\, d^3\vec{r}_2$) ; ceci explique respectivement la règle de sélection de Laporte[6] pour les spectres atomiques et la séparation du spectre de l'hélium en deux spectres distincts[7] (ortho et parahélium). Ces deux phénomènes étaient inexplicables avant l'avènement de la mécanique quantique.

Dans les trois remarquables livres cités, il s'agissait de généraliser au groupe des rotations de l'espace (SO3) et au groupe symétrique S_n (permutations de n objets) les considérations établies dans l'exemple pour le groupe de deux éléments (Z_2 ou S_2). Comme nous le verrons, à cause du spin de l'électron, c'est le groupe SU2, recouvrement universel de SO3, qui intervient. Les physiciens dénotent traditionnellement D_j la représentation unitaire irréductible de dimension $2j + 1$ de SU2 (à une équivalence près). On rappelle la réduction :

(1) $$D_{j_1} \otimes D_{j_2} \sim \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D_j\,, \quad j+j_1+j_2 \text{ entier} \geq 0$$

Les représentations irréductibles du groupe symétrique S_n sont étiquetées par des partitions de n : $[\lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_i^{\alpha_i} \ldots \lambda_k^{\alpha_k}]$ avec $\lambda_1 > \lambda_2 \ldots > \lambda_k > 0$ $\Sigma_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i = n$. Pour tout $n > 1$, deux représentations seulements sont de dimension un, les représentations complètement symétrique $[n]$, antisymétrique $[1^n]$. On sait que

(2) $$[n] \subset [\ldots \lambda_i^{\alpha_i} \ldots] \otimes [\ldots \lambda_i'^{\alpha_i'} \ldots] \Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_i', \quad \alpha_i = \alpha_i'$$

(2') $$[1^n] \subset [\qquad] \otimes [\qquad] \Leftrightarrow \lambda_i' = \hat{\lambda}_i = \Sigma_{j=1}^{k+1-i} \alpha_j$$
$$\alpha_i' = \hat{\alpha}_i = \lambda_{k-i+1} - \lambda_{k-i+2}$$

Dans ce dernier cas, les représentations seront dites complémentaires. Parfois, nous noterons simplement $[\ ]_\lambda$ une représentation irréductible de S_n, en notant alors $[\ ]_\lambda^c$ la complémentaire.

Nous appelons représentation primaire une somme directe de représentations unitaires irréductibles équivalentes.

Soit $\mathcal{K}^{(1)}$ un espace d'Hilbert ; nous notons $\mathcal{K}^{(n)} = \overset{n}{\otimes} \mathcal{K}^{(1)} = \mathcal{K}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{K}^{(1)}$ le produit tensoriel de n copies de $\mathcal{K}$. Par permutation des facteurs le groupe S_n agit sur $\mathcal{K}^{(n)}$. Décomposons cette représentation, que nous noterons $[\ ]_{\mathcal{K}^{(n)}}$, en somme directe de représentations primaires, et notons $\mathcal{K}^{(n)}_{[\ ]_\lambda}$ le sous-espace de $\mathcal{K}^{(n)}$ sur lequel agit la représentation primaire $\oplus [\ ]_\lambda$. Pour le sujet des livres cités, le théorème suivant est fondamental :

<u>Théorème</u> : Si $\mathcal{K}^{(1)}$ est de dimension finie k, l'action du groupe unitaire U_k sur $\mathcal{K}^{(1)}$ est transportée sur $\mathcal{K}^{(n)}$, où il agit par $\overset{n}{\otimes} U_k$. La décomposition de cette représentation de U_k en somme directe de représentations primaires fournit les <u>mêmes</u> espaces $\mathcal{K}^{(n)}_{[\ ]_\lambda}$. On peut donc noter par les mêmes symboles $[\ ]_\lambda$ les représentations irréductibles de U_k ainsi obtenues (ce sont toutes les représentations continues). Plus précisément

(3) $$\text{pour } S_n \quad [\ ]_{\mathcal{K}^{(n)}} \sim \oplus_\lambda\, u_\lambda\, [\ ]_\lambda$$

(3') $$\text{pour } U_k \quad \overset{n}{\otimes} U_k \sim \oplus_\lambda\, S_\lambda\, [\ ]_\lambda$$

où u_λ et S_λ sont les dimensions de la représentation notée $[\ ]_\lambda$ respectivement pour le groupe U_k et le groupe S_n.

Remarque 1 : Si $k < n$, seules interviennent les représentations de U_n ou de S_n telles que $\Sigma\alpha_i \leq k$. Par exemple les représentations de U_2 sont $[\lambda_1, \lambda_2]$ où les entiers λ_1, λ_2 satisfont $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$.

Remarque 2 : La restriction d'une représentation irréductible de U_k sur le sous groupe SU_k, est irréductible. Ainsi la restriction de $[\lambda_1,\lambda_2]$ de U_2 sur SU_2 est D_j avec $2j = \lambda_1 - \lambda_2$, et $\dim [\lambda_1,\lambda_2] = \lambda_1 - \lambda_2 + 1 = 2j + 1$

Nous noterons encore $\overset{n}{\Lambda}\, \mathcal{K}^{(1)}$ pour $\mathcal{K}^{(n)}_{[1^n]}$ (resp. $\overset{n}{V}\, \mathcal{K}^{(1)}$ pour $\mathcal{K}^{(n)}_{[n]}$) C'est l'espace des tenseurs de rang n complètement antisymétriques (resp. symétriques) sur $\mathcal{K}^{(1)}$ (de dimension quelconque).

Il nous faut aussi expliquer en quelques phrases ce qu'est la mécanique quantique[8]. Dans cette mécanique, un état physique est représenté par un vecteur $x\rangle$, normé : $\langle x,x\rangle = 1$, d'un espace d'Hilbert. Une grandeur physique $\mathfrak{A}$ est représentée par A, un opérateur self adjoint sur $\mathcal{K}$. Le résultat de la mesure de $\mathfrak{A}$ pour l'état $x\rangle$ appartient au spectre de A. La mécanique quantique ne permet de prédire que l'espérance mathematique ce ce résultat : $\langle x, Ax\rangle = \mathrm{Tr}\, A\, P_x$ où P_x est le projecteur sur le sous espace à une dimension engendré par $x\rangle$. Notons que deux vecteurs propres normés de P_x, qui ne diffèrent donc que par une phase, représentent le même état physique, puisqu'ils impliquent les mêmes prédictions. On appelle les A des observables, et il est utile de considérer les différentes algèbres associatives qu'ils engendrent[9]. Les P_x eux-mêmes sont des observables. Ainsi

$$\mathrm{Tr}\, P_x P_y = |\langle x,y\rangle|^2 \qquad (4)$$

est la probabilité d'observer dans l'état $x\rangle$ (resp. $y\rangle$) le système qu'on savait être dans l'état $y\rangle$ (resp. $x\rangle$).[10]

Dès 1928, Dirac[11] créa pour l'électron une mécanique quantique relativiste. Dans une telle théorie, la composante connexe $\mathcal{P}_0$

du groupe de Lorentz inhomogène [12] -que les physiciens appellent groupe de Poincaré, du nom de son inventeur- est un groupe d'automorphismes de l'algèbre des observables qui agit donc sur les P_x mais en laissant invariantes les probabilités de transitions $\mathrm{Tr}\, P_x P_y$. Comme le montre l'équation (4), $\mathcal{P}_0$ agit donc par isométries sur $\mathcal{H}$, et par conséquent [13] cette action est réalisée par une représentation unitaire projective (que l'on admet continue). Par définition de la notion de particule (système qu'on peut isoler et dont on peut négliger la composition interne) sur l'espace $\mathcal{H}^{(1)}$ des états d'une particule, la représentation est irréductible. La caractérisation des représentations unitaires projectives continues irréductibles de $\mathcal{P}_0$ correspondant aux particules élémentaires a été accomplie par Wigner [14] en 1937 ; elles sont données par des représentations de $\bar{\mathcal{P}}_0$, le recouvrement universel de $\mathcal{P}_0$ et sont définies par les invariants

(5) $$m > 0, \quad 2\,S \text{ entier} \geq 0 \ ; \ m = 0, \quad 2\lambda \text{ entier}$$

qui correspondent respectivement à la valeur de la masse $m \geq 0$ et du spin S ou $|\lambda|$ de la particule.

Les générateurs (= éléments de l'algèbre de Lie multipliés par $i = \sqrt{-1}$) de $\mathcal{P}_0$ sont des observables ; l'impulsion pour les translations d'espace, l'énergie pour celle de temps. Ce dernier observable est l'Hamiltonien H. Pour un système physique, il détermine son évolution ; les observables commutant avec H sur l'espace des états du système sont des constantes du mouvement. Les états stationnaires sont des états propres de H, la valeur propre étant leur énergie.

Le générateur du groupe des rotations autour d'un axe est l'observable moment cinétique par rapport à cet axe et $\vec{J}^2$, le carré du moment cinétique par rapport à un point O est représenté par $C\,\hbar^{-2}$ où $\hbar = (2\pi)^{-1}$x la constante de Planck et $-C$ est l'opérateur de Casimir [15] de l'algèbre de Lie de SO3, le sous-groupe de $\mathcal{P}_0$ des rotations laissant fixe le point O. L'ensemble des valeurs possibles de $\vec{J}^2\,\hbar^{-2}$ est le spectre de C, soit $j(j+1)$, où $2j$ entier ≥ 0, la représentation correspondante de SU_2 étant D_j. Pour une particule de spin S, $j - S = l$ entier (moment cinétique "orbital", le seul à avoir un correspondant en mécanique classique).

La cinématique des particules élémentaires (conservation de l'énergie, de l'impulsion, du moment cinétique, règles de sélection et corrélations angulaires de réactions successives, effets de polarisation, etc...) n'est autre qu'une étude détaillée, géométrique, du groupe $\mathcal{P}_o$. Une dizaine il y a vingt ans, le nombre des différentes particules connues dépasse aujourd'hui largement la centaine. La découverte de nouvelles particules, la détermination de leur masse et spin (ainsi que d'autres caractéristiques), leur classification, sont parmi les principales activités de la physique actuelle des particules fondamentales.

Le groupe complet de Poincaré est engendré par $\mathcal{P}_o$, par une réflexion d'espace, telle que "P" : $t, \vec{r} \rightarrow t, -\vec{r}$, et par une réflexion de genre temps, telle que "T" : $t, \vec{r} \rightarrow -t, \vec{r}$. Depuis le XIXe siècle les physiciens ont conscience de l'invariance des lois physique par rapport aux réflexions spatiales. C'est vrai à l'échelle macroscopique où n'interviennent que les intéractions électromagnétiques et la gravitation (si l'on excepte la production d'énergie nucléaire, soit par l'homme, soit au sein des étoiles). C'est encore vrai pour les intéractions nucléaires, beaucoup plus intenses que les interactions électromagnétiques, mais de faible portée (10^{-13} cm). Il existe dans la nature un quatrième type d'interactions, aussi de très courte portée, mais beaucoup plus faibles en intensité. On les appelle intéractions faibles (ou encore de Fermi). On n'a pu provoquer des réactions entre particules par leur intermédiaire que depuis 10 ans. Toutes les particules connues, à l'exception du photon, semblent douées d'intéractions faibles. Aussi ces intéractions sont responsables de la désintegration spontanée de la plupart des particules ~~connues~~ découvertes avant 1960. Plusieurs contradictions apparentes entre certains résultats expérimentaux furent résolues en 1957 par la confirmation de l'hypothèse de Lee et Yang(16) que les interactions faibles violent la parité, c'est-à-dire ne sont pas invariantes pour les réflexions spatiales "P" $\mathcal{P}_o$. Disons encore que ces réflexions ne sont des automorphismes de l'algèbre des observables que dans l'approximation (souvent valide) où l'on peut négliger les interactions faibles. Les mêmes résultats expérimentaux impliquaient aussi la violation de "C", l'involution qui échange particules et antiparticules et qui permit à Dirac en 1931 de prédire l'existence de l'électron positif découvert l'année suivante, et qui semblait aussi une symétrie fondamentale des lois physiques. Cette dissymétrie pour "P" et "C" peut être attribuée en partie aux neutrinos, particules de masse nulle, de spin 1/2, les seules qui n'ont que des interactions faibles (et gravifiques) ; conformément à des prédictions théoriques, il fut établi en 1962 qu'il existe deux espèces de neutrinos. Chacune d'elle a des particules et des antiparticules, mais les états des unes et des autres ne se correspondent ni par "P", ni par "C" mais seulement par le produit "PC" (17) cependant la violation de "P" et de "C" apparait aussi dans des désintégrations dues aux interactions faibles, mais où n'interviennent pas les neutrinos. Le produit "PC" semblait être ~~cependant~~ une invariance fondamentale de la physique, lorsqu'en 1964 fut découvert ( ) un mode rare (fréquence 2.10^{-3}) de la désintégration des K_2^o qui est une manifestation de violation de "PC" et qui ne semble pas due à la non symétrie de l'environnement (terre, et même galaxie) pour cette involution.

Nous ne savons réaliser des réflexions temporelles, mais "T" peut être interprété comme renversement du mouvement et aucun résultat expérimental n'a encore infirmé l'hypothèse que "T" est un antiautomorphisme involution de l'*-algèbre des observables. Mais il faut souligner que les différentes explications théoriques proposées pour la violation observée de "PC" ( ) violent toutes aussi "T" de façon à préserver le produit "PCT" comme symétrie de la physique. En effet, en théorie quantique des champs, le meilleurs outil que nous ayons actuellement pour étudier la dynamique des particules fondamentales, la covariance par rapport à la composante connexe $\mathcal{P}_o$ du groupe de Poincaré entraîne l'équivalence entre "PCT", antiautomorphisme involutif de la théorie" et "bonne relation entre spin et statistique".

Il nous faut expliquer cette dernière phrase. Si $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont les espaces des états de deux systèmes physiques, le produit tensoriel $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est l'espace des états de leur réunion si ces systèmes sont différents. Mais l'espace des états d'un système de n particules identiques, dont $\mathcal{H}^{(1)}$ est l'espace des états pour chacune d'elles est soit $\overset{n}{\Lambda}\, \mathcal{H}^{(1)}$ (statistique de Fermi Dirac) soit $\overset{n}{\mathrm{V}}\, \mathcal{H}^{(1)}$ (statistique de Bose-Einstein) suivant que ces particules ont un spin S demi-entier ou entier[18].

Les effets de la "statistique" (utilisation de $\overset{n}{\Lambda}\, \mathcal{H}$ ou $\overset{n}{\mathrm{V}}\, \mathcal{H}$ au lieu de $\overset{n}{\otimes}\, \mathcal{H}$) sont remarquables (superfluidité de l'hélium, supraconductivité, electrons dans les solides, règles d'intensité des spectres moléculaires, etc...). Limitons-nous à les décrire rapidement dans les atomes (où ils furent découverts empiriquement par Pauli : principe d'exclusion[19]) et dans les noyaux.

Dans les deux cas, la limite non relativiste est une excellente approximation. L'espace $\mathcal{H}^{(1)}$ des états d'une particule est alors le produit tensoriel

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_r \otimes E_{2S+1} \tag{6}$$

où $\mathcal{H}_r = \mathcal{L}^2(R^3)$ et E_{2S+1} l'espace à 2S+1 dimensions sur lequel agit la représentation D_S de SU_2, S étant le spin de la particule. Explicitement, les éléments de $\mathcal{H}$ sont les fonctions à valeur complexe $\phi(\vec{r}, \sigma)$, ($\vec{r} \in R^3$, $\sigma \in$ d'un ensemble de deux éléments) normées à $1 = (\phi, \phi)$

$$<\phi, \phi> = \Sigma_\sigma \int \bar{\phi}(\vec{r}, \sigma)\, \phi(r, \sigma)\, d^3 \vec{r} \tag{7}$$

Tous les observables des états de n particules indiscernables sont invariants pour S_n ; ils laissent donc stables les sous espaces $\mathcal{H}^{(n)}_{[\ ]_\lambda}$ de $\mathcal{H}^{(n)}$. Considérons un atome (ou ion) de n électrons . A une excellente approximation, l'Hamiltonien H ainsi qu'entre autres les opérateurs d'absoprtion et d'émission de photons, sont indépendants du spin, c'est-à-dire sont de la forme :

$$A = A_r \otimes I_S \text{ sur } \mathcal{H}^{(n)} = \mathcal{H}^{(n)}_r \otimes E^{(n)}_{S+1} \tag{8}$$

(où I_S est l'opérateur identité sur E_{2S+1}).

L'espace des états de l'atome de n électrons est

(9) $$\overset{n}{\Lambda}\,\mathcal{H}^{(1)} = \bigoplus_{\substack{\lambda_1+\lambda_2=n\\ \lambda_1\geq\lambda_2}} (\mathcal{H}_r^{(n)})_{[\lambda_1,\lambda_2]^c} \otimes (E_2^{(n)})_{[\lambda_1,\lambda_2]}$$

puisque les électrons ont spin 1/2 et obéissent donc à la statistique de Fermi (voir aussi notre remarque 1 ; ici $k = \dim E_2 = 2$). Chacun des λ = Entier $(n/2 + 1)$ sous-espaces dans (9) correspondant à un couple λ_1, λ_2 est stable pour les opérateurs de (8). Pour l'atome d'hélium, $n = 2$ et les deux sous-espaces sont ceux des états de l'orthohélium ([2]) et du parahélium $[1^2]$ dont nous avons déjà parlé.

A l'excellente approximation dont nous parlons pour $n = 1$ (atome d'hydrogène, ion He^+, Li^{++})

(10) $$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{Ze^2}{r}$$

Ses valeurs propres négatives sont les énergies de liaisons des différents états :

(10') $$E_\nu = -\frac{Ze^4 m}{2\hbar^2 \nu^2}, \quad \nu \text{ entier} > 0$$

Le sous-espace de $\mathcal{H}^{(1)}$ des états de valeur propre E_ν ayant la dimension $2\nu^2$.

Ce serait une piètre approximation de prendre pour l'hamiltonien d'un atome de n l'électrons $H = \Sigma_{i=1}^{n} H_{(i)}$ où $H_{(i)} = I\otimes I\otimes.\otimes H_1\otimes\ldots\otimes I$
t, coté i° facteur)
sur $\mathcal{H}^{(n)}$. Elle donne cependant l'ordre de grandeur de l'énergie minimum de liaison :

(11) $$E = \Sigma_{\nu=1}^{\nu_1} 2\nu^2 E_\nu + (n-\mu(\nu_1))E_{\nu_1+1}$$

où $\mu(\nu) = \Sigma_{k=1}^{\nu} 2k^2$; ν_1 tel que

(11') $$\mu(\nu_1) \leq n < \mu(\nu_1 + 1)$$

et permet ainsi de comprendre qualitativement la "structure en couche" des atomes[22]. Notons qu'en général des états de différents sous-espaces $[\lambda_1, \lambda_2]$ de (8) ont alors la même énergie. Lorsqu'on complète l'Hamiltonien comme on le doit, avec les termes de répulsion coulombienne des électrons : $\Sigma_{i<j} \cdot \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$, les énergies de ces différents états deviennent inégales, les états les plus antisymétriques sur $\mathcal{H}_r^{(n)}$, donc de plus grand $\lambda_1 - \lambda_2$, étant les plus stables. En tous cas pour un niveau atomique la symétrie $[\lambda_1, \lambda_2]$ est définie (à une bonne approximation) et comme nous allons le voir $\lambda_1 - \lambda_2$ est la valence chimique de ce niveau. (Les différentes valences d'un atome appartiennent à des niveaux d'énergie différente).

Grâce au théorème cité en introduction, nous aurions pu attendre les mêmes conclusions dans le langage suivant, les opérateurs de type (6) commutent avec ceux de la représentation $I \otimes (\overset{n}{\otimes} U_2)$ du groupe unitaire U_2 de l'espace des spin E_2. A cette approximation, en physique atomique, il y a conservation séparée du moment cinétique orbital et du moment cinétique de spin pour l'ensemble des n électrons. D'après la remarque 2, le spin total d'un état de symétrie $[\lambda_1, \lambda_2]$ est $1/2(\lambda_1 - \lambda_2)$ et l'on sait que la valence chimique de cet état est $\lambda_1 - \lambda_2$.

Bien que notre connaissance des forces nucléaires soit plus imprécise, la statistique de Fermi nous permet une étude assez détaillée du noyau atomique qu'on étudie en plaçant ses particules constituantes, les nucléons, dans le potentiel sphérique attractif moyen qu'ils créent. Il y a deux sortes de nucléons, les protons, qui ont une charge électrique +, et les neutrons, électriquement neutres. Leur masse est égale au millième près. Ils ont tous deux spin 1/2. L'espace des états d'un noyau de p protons, n neutrons, donc a = p + n nucléonsest donc

$$(11) \qquad \mathcal{H}^{(a)} \doteq (\overset{p}{\Lambda}\, \mathcal{H}^{(1)}) \otimes (\overset{n}{\Lambda}\, \mathcal{H}^{(1)})$$

les espaces $\overset{p}{\Lambda}\, \mathcal{H}^{(1)}$ et $\overset{n}{\Lambda}\, \mathcal{H}^{(1)}$ pouvant chacun être décomposés selon (8). Comme pour les atomes les noyaux présentent une structure en couche, séparément pour les protons ou les neutrons, la saturation des couches successives étant pour 2, 8, 20, 50, 82, 126 protons ou neutrons. Les forces résiduelles entre nucléons étant attractives, l'état fondamental d'un noyau sera le plus symétrique possible d'espace pour les protons et les neutrons, donc sa symétrie : $[\lambda_1, \lambda_2]$ pour les protons, $[\lambda_3, \lambda_4]$ pour les neutrons avec $\lambda_1 + \lambda_2 = p$, $\lambda_3 + \lambda_4 = n$ et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq \lambda_4 \geq 0$, sera telle que $\lambda_1 - \lambda_2$ et $\lambda_3 - \lambda_4$ soient minima. Ils sont nuls lorsque p et n sont deux nombres pairs, ce qui semble bien vérifié, puisque pout tous les noyaux p pair, n pair dont on a mesuré le spin dans l'état fondamental, on a trouvé $S = 0$[23].

Les protons et neutrons ont les mêmes propriétés nucléaires. A l'approximation où l'on ne tient compte que des forces nucléaires (à l'échelle des noyaux les forces électromagnétiques sont bien moins intenses et peuvent être négligées) les observables de la physique nucléaire sont symétriques par rapport à <u>tous</u> les nucléons et ils laissent stables les sous-espaces $\mathcal{H}^{(a)}_{[\;]\lambda}$ de l'espace $\mathcal{H}^{(a)}$ de a nucléons. Parce qu'il n'y a que deux sortes de nucléons, les protons et les neutrons qui satisfont indépendamment à la statistique de Fermi, seuls les espaces de symétries $[\lambda_1, \lambda_2]^c$, λ_1, $\lambda_2 = a$ représentent des noyaux. Les états d'une même représentation irréductible $[\lambda_1, \lambda_2]^c$ seront identiques (même énergie, même spin etc...) à cette approximation, bien qu'ils appartiennent à des noyaux différents dits isobares (différents n et p mais même $a = n + p$).

Dès 1934 Heisenberg[24] employa un raisonnement équivalent, mais plus élégant, pour traiter de cette question: si on néglige leur légère différence de masse et les propriétés électromagnétiques qui les différencient, tous les nucléons deviennent indiscernables ; ils satisfont la statistique de Fermi, à condition cependant de tenir compte de leur degré supplémentaire de liberté, la variable τ qui peut prendre deux valeurs : "proton" et "neutron". Les états d'un nucléon sont alors les fonctions de l'espace $\mathcal{H}^{(1)}_N$ (N = nucléon)

$$(12) \qquad \mathcal{H}^{(1)}_N \ni \phi(\vec{r}, \sigma, \tau) = \mathcal{H}^{(1)} \otimes E_2(\tau) = \mathcal{H}_r \otimes E_2(\sigma) \otimes E_2(\tau)$$

où $\mathcal{H}^{(1)}$ a été défini en (6) et (7). L'analogie avec (6) et tout ce qui précède est complète et la variable τ est appelée par analogie isospin[25]. Les observables nucléaires sont indépendantes de τ et le groupe U_2 de $E_2(C)$ est un groupe d'invariance de la théorie son action commutant avec celle de toutes les observables. Pour a nucléons tous les états d'une même représentation irréductible $[\lambda_1, \lambda_2]$ sur $E_2^{(a)}(\tau)$ sont nucléairement identiques. Nous disons encore qu'ils forment un "multiplet" de $\lambda_1 - \lambda_2 + 1$ états de même "isospin" $t = 1/2(\lambda_1 - \lambda_2)$ (Cf. remarque 2). Le nucléon ($a = 1$) est un doublet d'isospin 1/2. Les physiciens choisissent une base usuelle pour l'algèbre de Lie de SU_2

$$(13) \qquad [T_o, T_+] = T_+, \quad [T_o, T_-] = -T_-, \quad [T_+, T_-] = T_o$$

T_o étant choisi tel que l'état proton et l'état neutron soient ses deux vecteurs propres.

Les physiciens Ayant l'expérience du spin ordinaire, préfèrent le langage de l'isospin à celui, équivalent, des permutations.

Répétons alors le raisonnement fait à propos du spin. Les forces nucléaires étant attractives, les états de $^{N}_{\Lambda}\mathcal{K}_{N}$ les plus stables sont le plus symétriques possibles pour les variables ordinaires $(\vec{r}, \sigma)$ et donc le plus antisymétrique possible pour τ, c'est-à-dire l'isospin des états les plus stables $t = 1/2(\lambda_1 - \lambda_2) \geq 0$ est minimum. En effet, les noyaux légers ont à peu près même nombre de protons et de neutrons. Pour les noyaux plus lourds, l'excès de neutrons ($n-p/a \sim 20\%$ pour $a > 200$) est dû à la répulsion électrostatique des protons. De plus, à de rares exceptions près, l'état le plus stable d'un noyau a un isospin t minimum (le t pouvant encore être défini et mesuré pour des états de noyaux beaucoup plus lourds ($a \sim 50$) qu'on ne le pensait il y a quelques années.

Dès 1937, Wigner[26] étudia une approximation, qui bien que beaucoup plus grossière, n'est pas sans intérêt pour les noyaux légers et la classification des désintégrations β. Si on admet que les forces nucléaires sont non seulement indépendantes d'isospin, mais aussi de spin, alors le groupe d'invariance est le groupe U_4 agissant sur $E_2(\sigma) \otimes E_2(\tau)$. Chaque représentation irréductibles : $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$, avec $\Sigma\lambda = a$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$, forment un "supermultiplet" d'états identiques dans cette approximation. Pour trouver le contenu en spin et isospin du supermultiplet, on réduit en somme directe de représentations irréductibles la restriction de la représentation de U_4 du sous groupe $SU_2 \otimes SU_2$ agissant sur $E_2(\sigma) \otimes E_2(\tau)$.

L'introduction de l'isospin est-elle purement formelle et équivalente à la permutation des nucléons ? On peut répondre maintenant par la négative. Dès 1935, Yukawa avait prédit l'existence d'une particule, le méson π, qui jouerait pour les forces nucléaires le rôle que joue le photon pour les interactions électromagnétiques[27]. Dès 1938, son isospin t_π fut prédit : $t_\pi = 1$; cela signifie l'existence de 3 particules nucléairement identiques, mais de charge électrique différentes. Les états chargés π^+ et π^- furent découverts en 1947[ ], l'état neutre π^o (vie moyenne 10^{-16} sec) en 1949. Si on ne veut parler qu'en termes de permutations, il faut alors considérer les π comme des états liés d'un nucléon et d'un atinucléon. Mais depuis 1950 de nombreuses particules ont été découvertes. A l'exception des neutrinos, toutes ces particules ont des intéractions nucléaires (on dit encore forte), et sont toutes instables (10^{-8} à 10^{-23} sec de vie moyenne). Leur mode de production et de désintégration révèle une loi de conservation aussi fondamentale que la conservation de la charge électrique, la conservation de la charge nucléaire[28], qu'on appelle encore charge baryonique b. Les nucléons font partie de la famille des baryons (états fondamentaux p^+, n, Λ^0, Σ^+, Σ^0, Σ^-, Ξ^0, Ξ^- et de nombreux états excités) qui ont $b = 1$ et le spin demi-entier ; les π font partie de la famille des mésons (π^+, π^0, π^-, K^+, K^0, $\bar{K}^0$, K^-, η^0, etc...) qui ont $b = 0$ et spin entier[29]. A toutes ces particules on peut attribuer un isospin ; $t = 0$ pour Λ^0, η^0 ; $t = 1/2$ (n,p) (Ξ^0, Ξ^-), (K^+, K^0) ; $t = 1$, Σ^+ Σ^0 Σ^-, etc... les membres des multiplets ayant différentes charge électrique q (indiquée en indice), même charge baryonique, même spin, des masses dont les rapports différent au plus de quelques 10^{-2} de l'unité ; à l'approximation où l'on peut négliger les interactions faibles on peut encore définir une parité $\pm$ (caractérisant la variance pour les réflexions spatiales). L'involution "PCT" dont nous avons parlé implique l'existence (jamais infirmée) d'antiparticules de même masse, même spin, même isospin que les particules, mais de charges q et b opposées. Il y a même isomorphisme mathématique entre le groupe engendré par SU_2, recouvrement des rotations et "P" (réflexion d'espace) et le groupe engendré par SU_2, groupe d'isospin et "C", la conjugaison de charge, d'où un nouvel invariant, "l'isoparité", en physique des interactions fortes[30].

Une nouvelle étape fut franchie en 1958. En denotant $j^\mu(x)$, la densité (dans l'espace temps) du courant électromagnétique, l'opérateur "charge électrique totale" est $Q = \int_\sigma j_\mu(x)\, d\sigma^\mu(x)$, où σ est une surface de genre espace ; Q est indépendant de σ, sa conservation étant assurée par $\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu(x) = 0$. Cette conservation peut encore se traduire par l'invariance par rapport à un groupe U_1 : $\{e^{i\alpha Q}\}$. De même on peut concevoir une densité de courant $b^\mu(x)$ pour la charge baryonique. (Serait-ce $\hat{j}^\mu(x)$ la partie du courant $j^\mu(\ \ )$ invariante par le groupe SU_2 des transformations d'isospin ?) Feynman et Gell-Mann[31] découvrirent l'existence de la densité du courant vectoriel $v_i^\mu(x)$ d'isospin 1, dont la composante neutre $v_0^\mu(x) = j^\mu(x) - \hat{j}^\mu(x)$ et les composantes chargées $v_\pm^\mu(x)$ sont source des interactions faibles, et $T_i = \int_\sigma v_i^\mu(x) d\sigma_\mu(x)$ sont les générateurs infinitésimaux du groupe SU_2 d'invariance d'isospin. On se sent à la source d'une profonde découverte, les générateurs d'un groupe abstrait introduit pour les interactions fortes, étant des observables des interactions électromagnetiques et faibles ! Insistons cependant encore sur le fait que ce ne sont que des lois approchées ; par exemple $\frac{\partial}{\partial x^\mu} v_\pm^\mu(x) = 0$ seulement si on néglige les interactions faibles et électromagnétiques. Poursuivant sa ligne de pensée, Gell-Mann fut amené à proposer que les 3 intégrales $A_j = \int_\sigma a_j^\mu(x)\, d\sigma_\mu(x)$, de la densité pseudo vectorielle d'isospin 1, $a_j^\mu(x)$, une autre source" des interactions faibles, engendraient avec les trois T_i l'algèbre de Lie de $SO_4 = SU_2 \times SU_2$ (base $A_i + T_i$, $A_i - T_i$) ; cette hypothèse permit, l'an dernier, le calcul théorique d'une constante connue expérimentalement depuis plus de dix ans, ainsi que le calcul de plusieurs autres effets. Nonobstant des difficultés conceptuelles, beaucoup de physiciens ont essayé depuis un an d'agrandir cette algèbre pour incorporer les autres sources connues des interactions faibles et calculer d'autres phénomènes. Il est trop tôt pour faire un bilan.

Terminons enfin par un succès récent des plus spectaculaires : la prédiction en 1962, basée sur le groupe SU_3, de l'existence et des propriétés d'une nouvelle particule, qui fut trouvée deux ans après !

Les générateurs T_i de l'algèbre SU_2 de l'isospin et la charge électrique Q engendrent l'algèbre de Lie de U_2, le générateur du centre étant [34][35]

$$1/2\ Y = Q - T_o$$

l'observable ~~et~~ Y est appelé hypercharge, c'est donc une quantité conservée à l'approximation nucléaire, les particules de la nouvelle génération découverte depuis 1950 sont ~~pour~~ y = 1, 0, -1. Des symétries apparaissent. On sent qu'il faut agrandir le groupe U_2. On peut croire un moment refaire avec p, n, Λ ce qui avait été fait avec p, n pour l'isospin et obtenir ainsi U_3. Cela échoue. Cependant une famille de 8 baryons de spin 1/2 apparait clairement. Les physiciens interrogent les groupes de Lie compact de rang ≥ 2, contenant U_2 et ayant une représentation irréductible de dimension 8. Indépendamment Gell-Mann et Ne'eman[36] nous convainquirent tous que le bon choix était SU_3. On put comprendre, bien que le succès fut au prime abord étonnant, la relation entre les masses des 8 baryons

$$m = m_o + m_1\left(t(t+1) - \tfrac{1}{4}y^2\right) - m_2 y \tag{15}$$

appartenant à la représentation adjointe [2,1] de SU_3[37]. Gell-Mann montre qu'un groupe de sept baryons (resonances de vie moyenne 10^{-22} sec) de spin 3/2, de parité +, parmi lesquels quatre ont t = 3/2, y = 1 et trois autres ont t = 1, y = 0 doit appartenir à une représentation [3] de dimension 10, la formule (15) se simplifiant alors en $m = m'_o - m'y$. Le doublet prédit t = 1/2, y = -1 fut vite trouvé, avec la bonne masse et le spin 3/2. La particule t = 0, y = -2 se fit attendre deux interminables années[38]. C'est encore la seule particule connue dont $|y| > 1$.

Elle a la bonne masse, mais le spin n'a pû être mesuré puisque cinq exemplaires seulement de cette particule (Ω^-) ont pu être observés jusqu'à ce jour !

Plusieurs octets (représentations [2,1] de SU_3) (ainsi que deux singlets [0,0]) ont été identifiés parmi les mésons et d'autre pour les baryons. Seul le groupe adjoint SU_3/Z_3 intervient-il ?

Une plus grande symétrie put encore être trouvée(39) en étendant la théorie des supermultiplets de Wigner de l'isospin (SU_2) à SU_3. Les états des particules sont alors classés par les représentations de U_6, des relations apparaissant alors entre spin, masse, t, y. L'octet de baryon de spin 1/2 et le décuplet de spin 3/2 forment la représentation [2,1] de U_6 de dimension $56 = 8[(2 \times 1/2) + 1] + 10[(2 \times 3/2) + 1]$ tandis que tous les mésons de plus basses masses connues, 8 de spin et parité 0^-, 8 + 1 de spin et parité 1^- forment la représentation adjointe $[2,1^4]$ de U_6, de dimension $35 = 8 + 9(2+1)$.

L'utilité de cette symétrie U_6 est certaine, mais son domaine de validité est encore mal circoncis. Il est plus facile d'étudier des symétries exactes que des symétries approchées. L'art du physicien est de débrouiller nos observations de la nature en simplifiant, en idéalisant, en un mot, en faisant les approximations nécessaires. Loin de rebuter le mathématicien, ce passage d'une approximation à une autre devrait l'intéresser, puisqu'il s'agit d'une "déformation" de structure, entre autres pour notre sujet, de déformation de groupes et d'algèbres.(40),(41),(42)

\- - - - - - - - -

I

FOOTNOTES

1. W. Heisenberg, Z. Phys. 33, 879 (1925). Dès 1927, von Neumann, Göttinger Nachrichten, p. 245, donnait un exposé coherent de la mécanique quantique et y introduisait la notion de matrice densité. Voir aussi ref. 8 pour les traités de mécanique quantique.

2. En 1931 parut une 2[e] édition très augmentée et une traduction anglaise "The theory of groups and quantum mechanics, Methuen, London, 1931" ; édition livre de poche, Dover, New York, 1949.

3. Une traduction anglaise par S.J. Griffin, augmentée de 3 chapitres, a été éditée par Academic Press, New York, 1959.

4. Signalons aussi l'excellent, mais plus élémentaire, livre de E. Bauer, "Introduction a la théorie des groupes et ses applications a la physique quantique," Presses Universitaires de France, Paris, 1933.

5. J. von Neumann et E.P. Wigner, "Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons I.II. III," ; Z. Physik 47, 203, 49, 73, 51, 844 (1928). Ces deux auteurs ont collaboré durant toute la vie du premier et ont publié sept articles ensemble sur des problèmes de physique mathématique.

6. W. Heisenberg, "Über die Spektra von Atomsystem mit zwei Elektronen," Z. Phys. 39, 499 (1926).

7. Parmi les traités classiques de mécanique quantique: W. Pauli, Handbuch der Physik V.1, Springer (1958) (ré-édition d'un livre écrit avant 1933); P.A.M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1[e] ed. (1930), 4[e] edition (1958); J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (1930), Traduction Anglaise, Princeton University Press, Princeton (1955). Des axiomatisations de la mécanique quantique ont notamment été proposées par: "G. Birkhoff and J.von Neumann, The logic of

Quantum Mechanics, Ann. Math. 37(935) 1936 (voir aussi C. Piron, Helv. Phys. Acta 37, 439, 1964), et par I.E. Segal, "Postulates for general quantum mechanics," Ann. Math. 48, 930, 1947. Citons enfin G.W. Mackey: The Mathematical Foundation of Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1963.

8. L'espace $\mathcal{H}$ est sur le corps des complexes. Dès le premier chapitre de son traité (Cf. 7.) Dirac implique ce choix. Les physiciens ont aussi considéré le choix du corps des réels ou des quaternions.

9. En fait les algèbres de Jordan apparaissent plus naturels comme algèbres d'observables et furent créés à cet effet. P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner, "On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism," Ann. Math. 35, 29, 1934. Les physiciens préfèrent les algèbres associatives! Quelle topologie choisir? Plusieurs. Voir par exemple l'intéressant article de R. Haag et D. Kastler sur le rôle respectif de l'algèbre de von Neumann et de la C^*-algèbre d'observables: "An algebraic approach to quantum field theory," J. Math. Phys. 5, 848 (1964). Haag, Araki et, à leur suite, Borchers, Ruelle, Doplicher, Dell'Antonio, etc....., ont rénové cette approche algébrique.

10. En général notre information sur un système n'est que partielle et de nature probabiliste. Elle peut alors être représentée par un opérateur self-adjoint positif, de trace 1 .

11. P.A.M. Dirac, The Quantum Theory of the Electron. Proc. Roy. Soc. A117, 510, A178, 351 (1928).

12. Le groupe de Lorentz est le sous groupe du groupe linéaire réel à 4 dimensions laissant invariante la forme quadratique $t^2-r_1^2-r_2^2-r_3^2$. C'est un groupe de lie simple , non compact, à 6 paramètres.

13. Wigner, ref. 5, p. 251-254; V. Bargmann, J. Math. Phys. 5, 852, 1959.

14. E. Wigner, Ann. Math. 40, 149 (1939). Ce fut la première fois que

fut caractérisée toute une famille de représentations linéaires, unitaires, continues, irréductibles, d'un groupe de lie non compact. Complèté par les travaux de I. M. Gelfand and M.A. Naimark, Acad. Sci. USSR J. Phys. 10, 93, 1946, and Izv. Acad. Nauk SSR, Ser. Mat. 11, 911, 1947, et de Bargmann, Ann. Math. 48, 568 (1947), le travail de Wigner permet d'obtenir toutes les représentations de $\overline{\mathcal{P}}_o$.

15. H.B.G. Casimir introduisit cet être mathématique pour un problème physique.

16. T.D. Lee, C.N. Yang, "Question of Parity Conservation in Weak Interactions," Phys. Rev. 104, 254 (1956). Pour une anthologie d'articles originaux sur les interactions faibles, (ed. Kabir) "The development of Weak Interaction Theory," Gordon and Breach, New York, 1963.

17. Pour les neutrinos, toutes les particules (resp. les antiparticules) sont polarisées circulairement à gauche (droite). La fixation des états "particule" par rapport à ceux "antiparticule" est conventionnelle et historique.

18. Tout cela est principalement l'oeuvre de Pauli; cf son dernier article sur ce sujet, "Exclusion Principle, Lorentz Group and Reflection of Space-Time and Charge," p. 30 in Niels Bohr, and the Development of Physics, Pauli (ed.), Pergamon Press, New York 1955, mais un assez grand nombre d'auteurs y participèrent et les idées générales ne se dégagèrent que lentement. Nous conseillons R.F. Streater, A.S. Wightman, "PCT, Spin and Statistics, and all that," Benjamin, New York, 1964 (et sa bibliographie) écrit dans le cadre de la théorie axiomatique des champs.
Récemment H. Epstein (à paraître J. Math. Phys.) a prouvé le théorème "PCT" dans le cadre algèbrique plus général de Haag et Araki.

19. Pauli, Z. Phys. 31, 765, 1925. Voir aussi sa conférence de réception du prix Nobel, "Exclusion principle and quantum mechanics," Griffon Neuchâtel (1947).

20. Notations: - e = charge de l'electron; Ze , celle du noyau, $m = m_e m_N (m_e + m_N)^{-1}$. Une meilleure approximation que celle-ci, due à Pauli (Z. Phys. 47, 601, 1927) fait apparaître dans E des termes en $\alpha^2 = (e^2/\hbar c)^{-2} \sim 137^{-2}$. La théorie rélativiste de Dirac (ref. 11) est encore plus précise. Avec des raffinements ultérieurs, l'electrodynamique quantique permet de calculer à la précision relative de 10^{-6} tous les effets atomiques actuellement mesurés (on ne peut calculer effectivement au delà, mais il faudrait de toute façon sortir alors du cadre de la théorie pour tenir compte des effets nucléaires).
Cette excellente théorie est un défi aux mathématiciens, car elle n'est pas bien définie à leur sens. De nombreux traités exposent cette théorie. Citons simplement une anthologie d'articles originaux: Schwinger, Ed., Quantum Electrodynamics, Dover Press, New York, 1958.

21. Pour l'opérateur H_1 , apparait exceptionnellement une groupe d'invariance SO_4 pour $E < 0$ et $SO_{(1,3)}$ pour $E > 0$, plus grand que SO_3 . Ce qui explique que pour les états d'energie E_ν , les valeurs possibles du moment cinétique sont $0 \leq \ell \leq \nu - 1$.

22. Ces couches d'énergie ont successivement 2, 8, 18, 32, 50,...$2\nu^2$ électrons et les atomes qui ont pour nombre d'électrons les différentes valeurs de $\mu(\nu)$, soit 2, 10, 28, 50... n'ont que des couches saturées, dans leur plus bas état d'énergie. Notons qu'ils ont la symétrie $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{n}{2}$. Dans la nature des "sous-couches" apparaissent 2, 8, 8, 18, 18, 32..., les atomes saturés ayant 2, 10, 18, 36, 54, 86... Ce sont les gaz rares quasi inertes chimiquement.

23. Dans le cas nucléaire, la simplicité de ce raisonnement masque la complexité du phénomène pour les noyaux de a assez grand (> 20). Le spin du noyau est d'ailleurs le moment cinétique total des nucléons et non seulement la résultante de tous leurs moments cinétiques de spin.

24. W. Heisenberg, Z. Phys. 77, 1, 1932. Voir aussi B. Cassen, E.V. Condon, Phys. Rev. 50, 846 (1936).

25. Heisenberg (ref. 24) l'appela 5^{e} degré de liberté du nucléon, Wigner (ref. 26) "isotopic spin" . L'expression spin isobarique aurait mieux convenu. La raccourcissement en isospin provient de l'évolution normale du langage!

26. E. Wigner, Phys. Rev. 51, 106, (1937).

27. H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17, 48 (1935).

28. E. Wigner, "On the law of conservation of heavy particles." Proc. Nat. Ac. Sci. U.S. 38, 449 (1952).

29. Pour la relation entre charge et spin du point de vue de la théorie des groupes, voir F. Lurçat, L. Michel, N. Cim. 27, 574 (1951).

30. L. Michel, N. Cim. 10, 319 (1953).

31. R.P. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev. 109, 193 (1958). M. Gell-Mann, Phys. Rev. 111, 362 (1958).

32. M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125, 1067 (1962). Voir aussi Physics 1, 63 (1964); voir aussi ref. 34.

33. S.L. Adler, Phys. Rev. Lett. 14, 1051 (1965); W.I. Weisberger, Ibid. p. 1047.

34. La rélation (14) fut dégagée par M. Gell-Mann, Suppl. N. Cim. 2, 848 (1956), et K. Nishijima, Prog. Theor. Phys. (Japan) 13, 285 (1955).

35. Parmi les groupes qui ont cet algèbre comme algèbre de lie, c'est U_2 qui convient; e.g. L. Michel dans "Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics," (Ed. F. Gursey), Gordon Breach, New York, 1964.

36. Les principaux articles originaux sur ce sujet on été rassemblés

dans l'anthologie: Ed. M. Gell-Mann, U. Ne'eman, "The Eightfold Way" , Benjamin, New York, 1961.

37. Gell-Mann et Okubo indépendemment; voir ref. 35.

38. Phys. Rev. Letters 12, 204 (1964), 33 noms d'auteurs! Typique du travail en équipe pour la physique expérimentale des hautes énergies.

39. F. Gürsey et L. Radicati, Phys. Rev. Letters 13, 299 (1964); B. Sakita, Phys. Rev. 136B, 1756 (1964). Voir aussi l'anthologie d'articles originaux, F. Dyson, Ed., "Symmetry groups in nuclear and particle physics" , Benjamin, New York, 1966.

40. Voir par exemple I.E. Segal, Duke Math. J. 18, 221 (1951), et E. Inonu, E. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 39, 510 (1953) "contractant" les groupes.

41. Nous voulons signaler une conférence sur le même sujet que celle-ci et faite par un physicien a une audience de mathématiciens: A. Salam, J. London Math. Soc. 41, 49 (1966).

42. Beaucoup de questions n'ont pu être traitées ici; il me semble utile cependant de signaler la ligne suivante de travaux de physique utilisant les groupes.

La prédiction théorique des quantités mesurées en physique atomique ou nucléaire requiert le calcul multiples de produits de fonctions ayant une variance déterminée pour SU_2 . Les physiciens ont alors dû créer un algorithme efficace pour la réduction des produits tensoriels $D_{j_1}\ D_{j_2}\ \ldots\ D_{j_n}$. Pour les phénomènes à symétrie sphérique (ex: calcul de l'énergie d'un niveau, probabilité de transition, corrélations angulaires successives à partir d'un état polarisé, etc.) les valeurs prédites sont des polynômes d'expression appelées coefficients de Racah et dont le type le plus simple est

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 j_2 j_3 \\ j_4 j_5 j_6 \end{matrix} \right\} = \int_{SU_2} \chi_1(\alpha)\chi_2(\beta)\chi_3(\gamma)\chi_4(\beta\gamma^{-1})\chi_5(\gamma\alpha^{-1})\chi_6(\alpha\beta^{-1})\,d\mu(\alpha)\,d\mu(\beta)\,d\mu(\gamma) \qquad (1)$$