

MESURE DE LA POLARISATION DES ELECTRONS RELATIVISTES

CLAUDE BOUCHIAT

Laboratoire Central des Poudres, Paris†

et

LOUIS MICHEL

Faculté des Sciences, Université de Lille

Reçu le 1^{er} juillet 1957

Abstract: We describe a covariant formalism for handling electron polarization and we show how to use it in quantum field theory calculations. We apply it to the study of polarization effects in electron-electron collisions. These effects can be used for the measurement of the transverse and longitudinal polarization of relativistic electrons.

Des expériences récentes ont brillamment confirmé l'hypothèse de la non-conservation de la parité, proposée par Yang et Lee¹). De cette hypothèse, on peut conclure à la polarisation des particules de spin $\frac{1}{2}$, émises dans les désintégrations dues aux couplages faibles. Par exemple, les électrons de radioactivité β sont polarisés longitudinalement (lorsque les noyaux initiaux ne sont pas orientés, et que le recul ou la polarisation des noyaux finaux ne sont pas observés). L'étude de cette polarisation donnera des informations supplémentaires sur la nature de l'interaction de la radioactivité β . De même, les électrons de désintégration des mésons μ au repos sont polarisés; un travail de F. Bourdelet et L. Michel²) montre quelle information on peut déduire de l'étude de cette polarisation. Dans le présent travail, nous examinons de nouvelles possibilités de mesure de la polarisation des électrons relativistes, basée sur l'étude des collisions électron-électron. Cet article est divisé en deux parties. Nous décrivons d'abord avec quelque détail un formalisme relativiste, que nous avons déjà présenté^{11,14}), pour l'étude de la polarisation des particules de spin $\frac{1}{2}$, et nous passons en revue les différentes méthodes pour la mesure de cette polarisation. Puis nous étudions les collisions électron-électron de même charge ou de charge opposée, et nous appliquons ces résultats généraux à des exemples d'expériences possibles.

PREMIÈRE PARTIE

POLARISATION D'UNE PARTICULE DE SPIN $\frac{1}{2}$

1. Description Relativiste

Nous donnons ici brièvement des résultats qui seront établis dans un article à paraître, en collaboration avec A. S. Wightman (voir aussi Michel

† En stage au Palmer Physical Laboratory, Princeton University, Princeton N.J.

et Wightman ³). Cet article sera désigné par les initiales B.M.W. dans la suite. En mécanique quantique, un système physique est représenté par un vecteur d'un espace d'Hilbert. Soit P^λ , $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ les dix opérateurs hermitiques infinitésimaux du groupe de Lorentz inhomogène. Ils sont interprétés physiquement comme des opérateurs d'énergie P^0 , d'impulsion P^i et de moment cinétique total $M^{\mu\nu}$.

Considérons une particule de spin $\frac{1}{2}$, de masse $m \neq 0$ et d'énergie-impulsion $p^\mu = (p^0 = E, \mathbf{p})$ avec $p^\mu p_\mu = p^2 = m^2$. Les états de polarisation de cette particule sont représentés par les vecteurs d'un espace hermitique $\mathcal{E}(p^\mu)$ à deux dimensions. En suivant Bargmann et Wigner ⁴) nous considérons les 4 opérateurs †

$$W^\lambda = \frac{1}{2} \epsilon^{\lambda\nu\sigma} p_\nu M_{\sigma 0} \tag{1}$$

Ces opérateurs se transforment comme les composantes d'un pseudovecteur. L'état de la particule est représenté par une fonction $u(p)$, solution de l'équation de Dirac écrite, dans l'espace des moments,

$$(\bar{p} - m)u(p) = 0 \tag{2}$$

avec $\bar{p} = i\gamma^\mu p_\mu$. Dans cette représentation

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{i} \left(p^\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} - p^\nu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right) + \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \tag{3}$$

avec $\sigma^{\mu\nu} = (1/2i)(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$. Seul le dernier terme de (3) contribue à W^λ dans (1). L'opérateur W^λ est donc directement lié au moment cinétique de spin de la particule. En utilisant les relations d'anticommuation des γ^μ , on trouve

$$W^\lambda W_\lambda = -\frac{3}{4} m^2 = -\frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1) m^2. \tag{4}$$

Soit n^μ un quadrivecteur de genre espace tel que

$$n \cdot p = n^\mu p_\mu = 0 \quad \text{et} \quad n \cdot n = n^\mu n_\mu = -1. \tag{5}$$

L'opérateur $2W^\lambda n_\lambda / m$ agissant dans $\mathcal{E}(p^\mu)$ a pour carré l'opérateur unité, il a donc pour valeurs propres +1 et -1.

Nous prendrons comme vecteurs de base de $\mathcal{E}(p^\mu)$ les fonctions propres de $2W^\lambda n_\lambda / m$, solutions de (2). Nous les notons $u(p, \epsilon n)$ avec $\epsilon = \pm 1$. Dans l'article B.M.W. il est montré que les opérateurs W^λ peuvent alors être représentés dans $\mathcal{E}(p^\mu)$ par

$$\frac{2W^\lambda}{m} = - \sum_{i=1}^3 \tau_i n_i^\lambda, \tag{6}$$

où τ_1, τ_2, τ_3 sont les 3 matrices de Pauli, $n_3 = n$, et les vecteurs n_1 et n_2 sont définis comme suit:

† Voir l'appendice pour la définition des notations utilisées.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} &= 0, \quad \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_i = -\delta_{ij}, \\ \text{et} \quad \varepsilon^{\lambda\nu\sigma} p_\lambda (n_1)_\mu (n_2)_\nu (n_3)_\sigma &= -m. \end{aligned} \quad (6')$$

Étudions ce que donnent ces formules covariantes dans deux cas particuliers. Pour cela, nous allons exprimer \mathfrak{B} au moyen des matrices σ et α du formalisme de Dirac. On a alors

$$W^0 = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \sigma, \quad \mathbf{W} = -\frac{1}{2} p^0 \sigma - \frac{i}{2} \mathbf{p} \times \alpha. \quad (7)$$

Premier cas. La particule est au repos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (m, \mathbf{0}), \quad \mathbf{n}_i = (0, \mathbf{n}_i), \quad W^0 = 0, \\ \mathbf{W} &= -\frac{1}{2} m \sigma, \quad \frac{2W^\mu n_\mu}{m} = \sigma \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

ce qui est bien identique au formalisme usuel non relativiste.

Deuxième cas. Choisissons le quadrivecteur \mathbf{n}_3 longitudinal, c'est à dire \mathbf{n}_3 parallèle à \mathbf{p} . Dans ces conditions,

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_3 = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{m}, \frac{p^0}{m} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right), \quad \mathbf{n}_1 = (0, \mathbf{n}_1), \quad \mathbf{n}_2 = (0, \mathbf{n}_2), \quad (8)$$

où $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{p}$ forment un trièdre trirectangle direct, avec le choix

$$\frac{2}{m} \mathfrak{B} \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \quad (9)$$

On retrouve encore ici un résultat bien connu ⁵⁾.

Considérons un ensemble statistique d'électrons de même quantité de mouvement (par exemple les électrons d'un faisceau monocinétique). Nous appellerons pseudovecteur polarisation, le quadrivecteur \mathfrak{s} obtenu en prenant la valeur moyenne sur cet ensemble des opérateurs $-2W^\lambda/m$:

$$\mathfrak{s} = -\frac{2}{m} \langle \mathfrak{B} \rangle = \sum_i \langle \tau_i \rangle \mathbf{n}_i = \sum_i \zeta_i \mathbf{n}_i. \quad (10)$$

Les 3 vecteurs \mathbf{n}_i ayant été choisis, la polarisation peut être également définie par les 3 pseudoscalaires $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ tels que

$$-1 \leq \zeta_i \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \leq 1. \quad (11)$$

Dans un repère déterminé (le système du laboratoire par exemple), en faisant le choix particulier précédent (8) des vecteurs \mathbf{n}_i , on définit un état de polarisation longitudinale par $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$. Il est à noter que ces notions sont relatives à un repère déterminé. Une polarisation longitudinale dans un repère pourra être en partie, ou même totalement, transversale dans un autre repère.

Pour décrire un ensemble statistique d'électrons de même impulsion, il est

commode d'utiliser la notion de matrice densité. La fonction d'onde $v(\mathfrak{p})$ d'un électron peut s'écrire

$$v(\mathfrak{p}) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} u(\mathfrak{p}, \varepsilon n) C_{\varepsilon}. \tag{12}$$

La matrice densité d'un ensemble statistique d'électrons de même énergie-impulsion \mathfrak{p} est définie par

$$\varrho_{\varepsilon\eta} = \sum_m P^{(m)} C_{\varepsilon}^{(m)} C_{\eta}^{(m)*} \quad (\varepsilon, \eta = \pm 1). \tag{13}$$

$P^{(m)}$ est la probabilité de trouver un électron dans l'état $v^{(m)}$. Le nombre ζ_i est alors donné par

$$\zeta_i = \frac{1}{\text{tr } \varrho} \text{tr } (\varrho \tau_i). \tag{14}$$

La matrice ϱ peut être exprimée comme combinaison linéaire de la matrice unité et des 3 matrices τ_i ; en tenant compte de (14), ϱ peut s'écrire

$$\varrho = \frac{1}{2} (\text{tr } \varrho) (1 + \sum_i \zeta_i \tau_i). \tag{15}$$

En résumé, pour étudier totalement la polarisation d'un ensemble monocinétique d'électrons, il faut mesurer les 3 pseudoscalaires $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, ou, ce qui revient au même, le pseudovecteur

$$\mathfrak{s} = \zeta_1 n_1 + \zeta_2 n_2 + \zeta_3 n_3 = \frac{2\langle \mathfrak{B} \rangle}{m}. \tag{16}$$

Le degré de polarisation est

$$(-\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s})^{\frac{1}{2}} = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

2. Non-conservation de la Parité et Polarisation

Observer la non-conservation de la parité, c'est observer un pseudoscalaire (par rapport aux symétries d'espace). Par exemple, on observera la probabilité de transition λ d'un système S_1 en un système S_2 , et la probabilité de transition λ' de S'_1 symétrique de S_1 par rapport à un plan (ou hyperplan de genre espace) en S'_2 obtenu de S_2 par la symétrie Σ transformant S_1 en S'_1 . La symétrie Σ échange donc λ et λ' . Donc $\frac{1}{2}(\lambda + \lambda')$ est un scalaire et $\frac{1}{2}(\lambda - \lambda')$ un pseudoscalaire. S'il y a conservation de la parité $\lambda = \lambda'$. Quand on observe des particules, on observe des énergies-impulsions \mathfrak{p} et des polarisations \mathfrak{s} . Si on n'observe que des \mathfrak{p} , le seul pseudoscalaire que l'on peut former est le déterminant

$$\delta = -\varepsilon_{\lambda\mu\nu\varrho} p_1^\lambda p_2^\mu p_3^\nu p_4^\varrho$$

formé avec quatre impulsions-énergies. Mais si le processus ne comprend que quatre particules (radioactivité β , désintégration du méson μ) la conservation de l'impulsion-énergie annule δ , puisque les quatre \mathfrak{p} sont liés par une

relation linéaire. Il faut donc observer au moins une polarisation. Dans le cas d'une désintégration d'une particule d'impulsion-énergie p_0 et non polarisée, si on observe seulement la polarisation \hat{s}_1 d'une particule finale (et accessoirement son énergie-impulsion p_1 avec $p_1 \cdot \hat{s}_1 = 0$), le seul pseudo-scalaire que l'on peut former est $p_0 \cdot \hat{s}_1$. Il est nul si \hat{s}_1 est transversal, dans le système au repos de la particule initiale. Observer la non-conservation de la parité dans une désintégration de particule non polarisée au repos exigera donc d'observer la polarisation longitudinale \hat{s}_1 .

3. Mesure de la Polarisation des Électrons Relativistes

3.1. MÉTHODES DÉJÀ PROPOSÉES

Dans un excellent article d'ensemble ⁶⁾ H. A. Tolhoek donne la liste des différentes méthodes déjà proposées pour détecter la polarisation des électrons. Cette liste contient quatre méthodes:

- 1^o diffusion coulombienne des électrons par des noyaux lourds,
- 2^o diffusion des électrons par un corps ferromagnétique,
- 3^o mesure mécanique du moment cinétique d'électrons lents polarisés longitudinalement,
- 4^o diffusion des électrons lents par des atomes afin d'obtenir des états excités d'atomes orientés, et observation de la polarisation circulaire de la lumière émise par ces atomes.

De ces quatre méthodes, seule la première a été utilisée avec succès. Elle ne permet pas de mesurer la polarisation longitudinale (dans le système au repos des noyaux lourds). D'autre part, l'effet est maximum pour des négatons de 0.15 MeV environ d'énergie cinétique, ou des positons de 0.8 MeV et décroît assez rapidement avec l'énergie. Les méthodes 3 et 4 ne peuvent s'appliquer qu'aux électrons très lents.

Nous étudions dans cet article la deuxième méthode. Contrairement à ce qui est dit dans la réf. ⁶⁾, cette méthode peut s'appliquer aux électrons relativistes.

3.2. AUTRES MÉTHODES POUR LA MESURE DE LA POLARISATION QUELCONQUE D'ÉLECTRONS RAPIDES

Les interactions faibles de l'électron ne peuvent permettre de mesurer pratiquement sa polarisation (section efficace de l'ordre de 10^{-44} cm²). En dehors d'une mesure mécanique (méthode 3), toute mesure sera donc basée sur l'interaction électromagnétique de l'électron. Nous avons déjà vu que la diffusion coulombienne ne permet de mesurer que la polarisation transversale (et pour une bande assez étroite de l'énergie de l'électron). En effet, le scalaire observé (les interactions électromagnétiques conservent la parité!) est proportionnel à $\det(\mathfrak{P}, p_a, p_b, \hat{s})$ où \mathfrak{P} , p_a , p_b sont respectivement les énergies-impulsions du noyau, de l'électron initial et de l'électron final. Pour

observer la polarisation \mathfrak{s} par une autre méthode, il faudra donc faire intervenir une autre polarisation. Nous proposons dans la liste ci-dessous trois types de méthodes faisant intervenir une autre polarisation; les deux premières, a) et b), sont des mesures indirectes.

a) La polarisation \mathfrak{s} de l'électron est modifiée en \mathfrak{s}' par un phénomène qui permet de mesurer $\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s}'$, et on mesure directement \mathfrak{s}' . Cette méthode a surtout l'intérêt de transformer \mathfrak{s} longitudinal en \mathfrak{s}' transversal, mesurable par diffusion coulombienne.

b) On remplace la mesure de \mathfrak{s} par la mesure de la polarisation d'une autre particule grâce à un phénomène permettant de mesurer une fonction des deux polarisations. Puisque la seule interaction que nous puissions utiliser est l'interaction électromagnétique de l'électron, cette autre particule sera un photon.

c) On mesure directement \mathfrak{s} par la diffusion sur des cibles orientées (noyaux, électrons).

3.3. MÉTHODES BASÉES SUR LA MODIFICATION DE LA POLARISATION DE L'ÉLECTRON

On se servira d'un champ électromagnétique extérieur.

a.1. *Champ magnétique*

Mentionnons ici, pour mémoire, l'expérience proposée par Louisell *et al.* ⁷⁾. Le facteur de Landé du moment magnétique de l'électron $g = 2[1 + (\alpha/2\pi) + \dots]$, étant légèrement différent de 2, la vitesse angulaire de rotation du spin, dans un champ magnétique homogène, est légèrement différente de celle de l'électron. Le but de cette expérience est de mesurer avec une grande précision le moment magnétique de l'électron. Nous la mentionnons ici puisqu'elle permet accessoirement de transformer une polarisation longitudinale en polarisation transversale.

Dans un champ électromagnétique inhomogène des expériences basées sur des phénomènes de résonance pourraient permettre la mesure de g , et accessoirement de la polarisation d'électrons de très faible énergie: voir réf. ⁸⁾.

a.2. *Champ électrique*

Il est possible de transformer la polarisation \mathfrak{s} d'un faisceau d'électrons par déviation électrostatique: voir réf. ⁸⁾.

a.3. *Diffusion coulombienne*

Une diffusion coulombienne ne permet pas d'analyser la polarisation longitudinale de l'électron. Par contre la polarisation transversale ζ'_t de l'électron après diffusion dépend de la polarisation longitudinale ζ_1 initiale. Si ζ_1 est nul, la polarisation ζ'_t est perpendiculaire au plan de diffusion. Si $\zeta_1 \neq 0$, il apparaît une composante transversale de ζ'_t dans le plan de diffu-

sion. L'étude de ζ_1 revient à mesurer l'angle α que fait ζ'_t avec la normale au plan de diffusion. Pour cela on fait une seconde diffusion coulombienne. La section efficace σ_2 de cette deuxième diffusion est linéaire en $\cos(\varphi - \alpha)$ où φ est l'angle entre les deux normales des plans de diffusions. L'étude de la dépendance de σ_2 par rapport à φ permet donc de mesurer α . La dépendance de α par rapport à ζ_1 peut être aisément déduite des formules (3.8) de l'article de Tolhoek⁶).

Remarquons que, dans ces trois méthodes, l'énergie de l'électron n'est pas essentiellement modifiée. On est donc limité par la bande d'énergie de l'analyseur final employé (diffusion coulombienne par exemple).

a.4. *Modification de la polarisation par collision électron-électron*

Cette méthode est basée sur le sujet étudié dans cet article. En principe, elle permet de réduire l'énergie cinétique de l'électron initial par un facteur donné tout en ajoutant à sa polarisation longitudinale une partie transversale. Nous étudierons les limitations en fait de cette méthode.

3.4. MÉTHODES RAMENANT LA MESURE DE LA POLARISATION \mathfrak{s} DE L'ÉLECTRON À LA MESURE DE LA POLARISATION DE RAYONS γ

On sait que la polarisation de la lumière la plus générale est elliptique. La variance relativiste⁸) des quatre éléments de la matrice densité pour cette polarisation est la suivante: †

un scalaire η (le degré de polarisation);

un pseudoscalaire ξ (qu'on peut appeler le degré de polarisation circulaire): ξ est la tangente de la demi-latitude du point représentatif sur la sphère de Poincaré;

le double d'un angle (l'azimuth du plan contenant le grand axe de l'ellipse et la direction de propagation) que l'on peut caractériser par un quadri-vecteur u , défini au signe près et à une composante près le long de l'énergie-impulsion \mathfrak{f} du photon, par les relations

$$u \cdot \mathfrak{f} = 0, \quad -u^2 + \xi^2 = \eta^2. \quad (18)$$

Le scalaire que l'on peut donc observer pour la mesure de \mathfrak{s} est $\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{f} \xi$. Si l'on connaît la dépendance de la section efficace du premier phénomène par rapport à $\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{f} \xi$, on est donc ramené à la mesure de ξ , degré de polarisation circulaire du photon. Celle-ci se fait par la mesure de l'absorption des γ dans un ferromagnétique saturé, la section efficace de l'effet Compton dépendant de l'orientation du champ magnétisant par rapport à la direction de propagation des photons polarisés circulairement.

Parmi les phénomènes d'émission de photons par les électrons, le rayonnement de freinage (Bremsstrahlung) semble bien convenir pour la mesure de

† Dans les notations de Jauch et Rohrlich⁹), $\eta = K$ (éq. 2-102), $\xi = \operatorname{tg} \psi$ et l'azimuth de u est φ .

la polarisation des électrons rapides par la méthode indiquée dans ce paragraphe. H. Epstein et G. Flamand (à paraître) étudient ce cas du rayonnement de freinage †.

3.5. MESURE DE \mathcal{C} AU MOYEN DE CIBLES ORIENTÉES

c.1. La diffusion des électrons par des noyaux orientés permet en principe de mesurer la polarisation des électrons¹⁰).

c.2. La diffusion d'électrons polarisés par des négatons liés et polarisés (par exemple, dans un corps ferromagnétique aimanté à saturation) semble plus accessible à l'expérience. Nous étudions dans la deuxième partie (§ 5) les possibilités qu'elle offre pour la mesure de la polarisation d'un faisceau d'électrons.

DEUXIÈME PARTIE

PHÉNOMÈNES DE POLARISATION DANS LA COLLISION ÉLECTRON-ÉLECTRON

4. Théorie générale

On considère la collision $a + b \rightarrow c + d$. Les impulsions-énergies p_a, p_b, p_c, p_d des négatons a, b, c, d sont supposées déterminées. Nous donnerons l'état initial du système par une matrice densité ρ_{in} opérant dans l'espace $\mathcal{E}(p_a) \otimes \mathcal{E}(p_b)$. Les éléments de matrice de ρ_{in} sont donnés par la formule

$$\rho_{\varepsilon_a \eta_a \varepsilon_b \eta_b} = \sum_{m, m'} P^{(m, m')} C_{\varepsilon_a}^{(m)} C_{\eta_a}^{(m')*} C_{\varepsilon_b}^{(m')} C_{\eta_b}^{(m')*}. \tag{19}$$

Dans cette formule $P^{(m, m')}$ est la probabilité que l'électron a se trouve dans l'état

$$v^{(m)}(p_a) = \sum_{\varepsilon_a} C^{(m)} u(p_a, \varepsilon_a \Pi_a)$$

et l'électron b dans l'état

$$v^{(m')}(p_b) = \sum_{\varepsilon_b} C^{(m')} u(p_b, \varepsilon_b \Pi_b).$$

S'il n'existe pas de corrélation entre les électrons a et b, $P^{(m, m')}$ s'écrit sous la forme

$$P^{(m, m')} = P^{(m)} \cdot P^{(m')}.$$

Dans ce cas

$$\rho_{in} = \frac{1}{4} (\text{tr } \rho_a) (\text{tr } \rho_b) [1 + a \zeta_i (\tau_i \odot 1) + b \zeta_j (\tau_j \odot 1) + a \zeta_i b \zeta_j (\tau_i \odot \tau_j)]. \tag{20}$$

Dans le cas général, $P^{(m, m')}$ ne peut pas se mettre sous la forme $P^{(m)} \cdot P^{(m')}$.

† Nous venons de recevoir un manuscrit de K. W. McVoy qui étudie la polarisation circulaire du rayonnement de freinage émis vers l'avant par des électrons polarisés longitudinalement, afin d'interpréter des expériences de Goldhaber, Grodzins et Sunyar. Nous remercions ces auteurs de la communication de leur travail avant publication.

Nous écrivons ϱ_{in} , qui est une matrice quatre par quatre, comme combinaison linéaire des 16 matrices $1 \odot 1$, $1 \odot \tau_i$, $\tau_i \odot 1$, $\tau_i \odot \tau_i$:

$$\varrho_{\text{in}} = \frac{1}{4}(\text{tr } \varrho_{\text{in}})[1 + a\zeta_i(\tau_i \odot 1) + b\zeta_j(1 \odot \tau_j) + \Gamma_{ij}(\tau_i \odot \tau_j)]. \quad (21)$$

La quantité $C_{ij} = \Gamma_{ij} - a\zeta_i b\zeta_j$ caractérise la corrélation qui existe entre les spins des électrons a et b. M étant la matrice de collision, la matrice densité finale ϱ_f est donnée par

$$\varrho_f = \text{tr } (M\varrho_{\text{in}}M^\dagger). \quad (22)$$

Dans ce qui suit, nous prendrons pour M la matrice de collision calculée à partir des diagrammes de Feynman-Dyson du second ordre. Elle conduit à la formule de Moller pour la section efficace de collisions négaton-négaton.

Pour alléger l'écriture, nous poserons

$$u(\varepsilon_a) = u(p_a, \varepsilon_a \Pi_a). \quad (23)$$

L'élément de matrice de collision a pour expression ¹²⁾

$$(\varepsilon_c \varepsilon_d | M | \varepsilon_a \varepsilon_b) = \frac{e^2}{4\pi^2 i} \frac{1}{(E_a E_b E_c E_d)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\{u^+(\varepsilon_c) i\gamma^\mu u(\varepsilon_a)\} \{u^+(\varepsilon_d) i\gamma_\mu u(\varepsilon_b)\}}{(p_c - p_a)^2} - \frac{\{u^+(\varepsilon_d) i\gamma^\mu u(\varepsilon_a)\} \{u^+(\varepsilon_c) i\gamma_\mu u(\varepsilon_b)\}}{(p_d - p_a)^2} \right]. \quad (24)$$

Nous nous proposons d'évaluer la quantité $(\varepsilon_c \varepsilon_d | M | \varepsilon_a \varepsilon_b) (\eta_a \eta_b | M^\dagger | \varepsilon_c \varepsilon_d)$. Elle peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} (\varepsilon_c \varepsilon_d | M | \varepsilon_a \varepsilon_b) (\eta_a \eta_b | M^\dagger | \eta_c \eta_d) &= (\varepsilon_c \varepsilon_d | M | \varepsilon_a \varepsilon_b) [(\eta_c \eta_d | M | \eta_a \eta_b)]^* \\ &= \frac{e^4}{16\pi^4} \frac{1}{E_a E_b E_c E_d} \left[\frac{A}{\hbar^4} - \frac{1}{\hbar^2 \xi^2} (C + D) + \frac{B}{\xi^4} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \{u^+(\varepsilon_c) i\gamma^\mu u(\varepsilon_a)\} \{u^+(\eta_a) i\gamma^\nu u(\eta_c)\} \{u^+(\varepsilon_d) i\gamma_\mu u(\varepsilon_b)\} \{u^+(\eta_b) i\gamma_\nu u(\eta_d)\}, \\ C &= \{u^+(\varepsilon_c) i\gamma^\mu u(\varepsilon_a)\} \{u^+(\eta_a) i\gamma^\nu u(\eta_d)\} \{u^+(\varepsilon_d) i\gamma_\mu u(\varepsilon_b)\} \{u^+(\eta_b) i\gamma_\nu u(\eta_c)\}; \end{aligned}$$

on obtient B à partir de A et D à partir de C , en faisant les substitutions $c \leftrightarrow d$. On a d'autre part posé

$$\hbar = p_c - p_a = p_b - p_d, \quad \xi = p_d - p_a = -p_c + p_b. \quad (26)$$

On désigne par $u \odot v$ la matrice d'élément $u_\alpha v_\beta$. En groupant convenablement les termes de A et C , on peut encore les écrire sous la forme

$$\begin{aligned} A &= \text{tr} [\{u(\eta_c) \odot u^+(\varepsilon_c)\} i\gamma^\mu \{u(\varepsilon_a) \odot u^+(\eta_c)\} i\gamma^\nu] \\ &\quad \times \text{tr} [\{u(\eta_a) \odot u^+(\varepsilon_d)\} i\gamma_\mu \{u(\varepsilon_b) \odot u^+(\eta_b)\} i\gamma_\nu], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} C &= \text{tr} [\{u(\eta_c) \odot u^+(\varepsilon_c)\} i\gamma^\mu \{u(\varepsilon_a) \odot u^+(\eta_a)\} i\gamma^\nu \{u(\eta_d) \odot u^+(\varepsilon_d)\} \\ &\quad \times i\gamma_\mu \{u(\varepsilon_b) \odot u^+(\eta_b)\} i\gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (27')$$

Dans B.M.W. on établit la formule

$$u(p, \varepsilon n) \odot u^+(p, \varepsilon' n) = \frac{1}{4} [\delta_{\varepsilon\varepsilon'} + i\gamma^5 \sum_{i=1}^{i=3} \overline{n_i}(\tau_i)_{\varepsilon'\varepsilon}] (\not{p} + m). \quad (28)$$

Or la matrice densité ϱ_f décrivant l'état final est

$$(\varrho_f)_{\varepsilon_c \varepsilon_d \eta_c \eta_d} = \sum_{\varepsilon_a \varepsilon_b \eta_a \eta_b} (\varepsilon_c \varepsilon_d | M | \varepsilon_a \varepsilon_b) (\varrho_{in})_{\varepsilon_a \varepsilon_b \eta_a \eta_b} (\eta_a \eta_b | M^\dagger | \eta_c \eta_d). \quad (29)$$

Le calcul de ϱ_f a donc ainsi été ramené à un calcul de traces de produits de matrices de Dirac. Pour ces calculs, on peut faire usage en particulier de la formule

$$\frac{1}{4} \text{tr} \overline{a_1} \overline{a_2} \dots \overline{a_n} = \sum \delta P(a_{i_1} \cdot a_{i_2}) \dots (a_{i_{n-1}} \cdot a_{i_n}).$$

La somme Σ est étendue à toutes les paires (i_k, i_{k+1}) avec $i_k < i_{k+1}$; δP est la signature de la permutation

$$P = \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ i_1 \dots i_n \end{pmatrix}.$$

5. Diffusion d'un Faisceau d'Électrons par des Électrons Liés dont les Spins sont Orientés

Les électrons a sont des électrons d'un faisceau monocinétique polarisé. Le vecteur polarisation est noté ${}_a \mathfrak{s} = \sum_i {}_a n_i {}_a \zeta_i$. Les électrons b sont les électrons d'un atome d'une substance ferromagnétique aimantée à saturation. Nous supposons que les électrons a sont assez rapides pour que l'on puisse considérer les électrons b comme étant au repos dans le système du laboratoire. La polarisation des électrons b sera, dans ce repère, $\mathfrak{s}_b = (0, \zeta_b \mathbf{n})$ \mathbf{n} étant un vecteur antiparallèle au champ magnétique extérieur. On pourra prendre pour $|\zeta_b|$ le rapport du nombre d'électrons magnétiques au nombre total d'électrons de l'atome, ce rapport est de l'ordre de 1/13 pour le fer. Nous allons calculer la section efficace de la diffusion $a+b \rightarrow c+d$. Nous donnerons d'abord la formule relative à un repère quelconque. La matrice densité initiale s'écrit avec une normalisation convenable

$$\varrho_{in} = \frac{1}{4} [1 + {}_a \zeta_i (\tau_i \odot 1) + {}_b \zeta_j (1 \odot \tau_j) + {}_a \zeta_i {}_b \zeta_j (\tau_i \odot \tau_j)].$$

La section efficace de diffusion est proportionnelle à la quantité I , qui est donnée par

$$I = \frac{\text{tr} \varrho_f}{\text{tr} \varrho_{in}} = \text{tr} \varrho_f = \text{tr} M \varrho_{in} M^\dagger \\ = \text{tr} M M^\dagger + {}_a \zeta_i \text{tr} M (\tau_i \odot 1) M^\dagger + {}_a \zeta_j \text{tr} M (1 \odot \tau_j) M^\dagger + {}_a \zeta_i {}_b \zeta_j \text{tr} M (\tau_i \odot \tau_j) M^\dagger.$$

Examinons d'abord le cas où ${}_b \zeta_j = 0$. Ce cas correspond à une diffusion d'un faisceau d'électrons sur des électrons dont les spins ne sont pas orientés. La section efficace se réduit à

$$I_1 = \text{tr } M M^\dagger + a \zeta_i \text{tr } M (\tau_i \odot 1) M^\dagger.$$

Nous allons montrer que $K_i = \text{tr } M (\tau_i \odot 1) M^\dagger$ est une quantité nulle, ce qui entraîne que la section efficace ne dépend pas de la polarisation ξ_a . Ce résultat provient de l'approximation faite dans l'évaluation de M . Dans le cas des collisions nucléon-nucléon, où cette approximation n'est plus légitime, la quantité K_i a été trouvée expérimentalement différente de 0.

Nous avons

$$\begin{aligned} K_i &= \sum (\varepsilon_c \varepsilon_d |M| \varepsilon_a \varepsilon_b) (\tau_i)_{\varepsilon_a \eta_a} \delta_{\varepsilon_b \eta_b} (\eta_a \eta_b |M^\dagger| \varepsilon_c \varepsilon_d) \\ &= \frac{e^4}{16\pi^4} \frac{1}{E_a E_b E_c E_d} [A_i \eta^{-4} - \eta^{-2} \mathfrak{f}^{-2} (C_i + D_i) + \mathfrak{f}^{-4} B_i]. \end{aligned}$$

En tenant compte des égalités

$$\sum_{\varepsilon} u(\mathfrak{p}, \varepsilon \mathfrak{n}) \odot u^+(\mathfrak{p}, \varepsilon \mathfrak{n}) = \frac{1}{2} (\bar{\mathfrak{p}} + m) \quad (30)$$

et

$$\sum_{\varepsilon \varepsilon'} u(\mathfrak{p}, \varepsilon \mathfrak{n}) \odot u^+(\mathfrak{p}, \varepsilon' \mathfrak{n}) (\tau_i)_{\varepsilon \varepsilon'} = \frac{1}{2} i \gamma^5 \bar{n}_i (\bar{\mathfrak{p}} + m), \quad (30')$$

qui sont des conséquences immédiates de (28), on obtient pour A_i et C_i les expressions

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{4} \text{tr} [(\bar{\mathfrak{p}}_c + m) i \gamma^\mu i \gamma^5 \bar{n}_i (\bar{\mathfrak{p}}_a + m) i \gamma^\nu] \frac{1}{4} \text{tr} [(\bar{\mathfrak{p}}_d + m) i \gamma_\mu (\bar{\mathfrak{p}}_b + m) i \gamma_\nu], \\ C_i &= \frac{1}{16} \text{tr} [(\bar{\mathfrak{p}}_c + m) i \gamma^\mu i \gamma^5 \bar{n}_i (\bar{\mathfrak{p}}_a + m) i \gamma^\nu (\bar{\mathfrak{p}}_d + m) i \gamma_\mu (\bar{\mathfrak{p}}_b + m) i \gamma_\nu]. \end{aligned}$$

Les quantités A_i et C_i doivent être réelles. Or avec la définition que nous avons choisie pour les matrices de Dirac, il existe une représentation dans laquelle elles sont toutes réelles (représentation de Majorana). On voit alors que les expressions donnant A_i et C_i sont imaginaires pures. On a donc

$$A_i = C_i = D_i = B_i = 0,$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

Revenons maintenant au cas de la diffusion des faisceaux d'électrons polarisés par des électrons orientés. La section efficace de diffusion est donc de la forme

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \lambda_{ij} a \zeta_i b \zeta_j), \quad (31)$$

σ_0 désignant la section efficace calculée par Møller. La formule donnant λ_{ij} est

$$\lambda_{ij} = \frac{\text{tr } M (\tau_i \odot \tau_j) M^\dagger}{\text{tr } M M^\dagger}.$$

Nous poserons

$$\lambda_{ij} = \frac{N_{ij}}{D}$$

avec

$$D = A_0 \mathfrak{f}^4 - (C_0 + D_0) \mathfrak{h}^2 \mathfrak{f}^2 + B_0 \mathfrak{f}^4,$$

$$N_{ij} = A_{ij} \mathfrak{f}^4 - (C_{ij} + D_{ij}) \mathfrak{h}^2 \mathfrak{f}^2 + B_{ij} \mathfrak{h}^4.$$

Les quantités $A_0, B_0, \dots, A_{ij}, B_{ij}$ ont été calculées à l'aide des formules suivantes, obtenues en appliquant (30) et (30'):

$$A_0 = \frac{1}{4} \text{tr} [(\bar{p}_c + m) \gamma^\mu (\bar{p}_a + m) \gamma^\nu] \frac{1}{4} \text{tr} [(\bar{p}_d + m) \gamma_\mu (\bar{p}_b + m) \gamma_\nu],$$

$$C_0 = \frac{1}{4} \text{tr} [(\bar{p}_c + m) \gamma^\mu (\bar{p}_a + m) \gamma^\nu (\bar{p}_d + m) \gamma_\mu (\bar{p}_b + m) \gamma_\nu],$$

$$A_{ij} = \frac{1}{4} \text{tr} [(\bar{p}_c + m) \gamma^\mu i \gamma^5 \bar{a} n_i (\bar{p}_a + m) \gamma^\nu] \frac{1}{4} \text{tr} [(\bar{p}_d + m) \gamma_\mu i \gamma^5 \bar{b} n_j (\bar{p}_b + m) \gamma_\nu],$$

$$C_{ij} = \frac{1}{16} \text{tr} [(\bar{p}_c + m) \gamma^\mu i \gamma^5 \bar{a} n_i (\bar{p}_a + m) \gamma^\nu (\bar{p}_d + m) \gamma_\mu i \gamma^5 \bar{b} n_j (\bar{p}_b + m) \gamma_\nu].$$

Il est commode de définir les trois nombres κ, λ, μ par

$$p_a \cdot p_b = p_c \cdot p_d = m^2 \kappa, \quad p_a \cdot p_c = p_b \cdot p_d = m^2 \lambda, \quad p_a \cdot p_d = p_b \cdot p_c = m^2 \mu;$$

ces trois nombres sont liés par la relation $\lambda + \mu = \kappa + 1$. Le calcul donne †, pour N_{ij} et D ,

$$N_{ij} = 2(a n_i \cdot b n_j) [3(\lambda + \mu) - 4 - \lambda \mu] (\lambda - 1)(\mu - 1)$$

$$+ m^{-2} (a n_i \cdot p_c) (b n_j \cdot p_d) (2\lambda - 3)(\mu - 1)^2$$

$$+ m^{-2} (a n_i \cdot p_d) (b n_j \cdot p_c) (2\mu - 3)(\lambda - 1)^2$$

$$- m^{-2} [(a n_i \cdot p_c) (b n_j \cdot p_c) + (a n_i \cdot p_d) (b n_j \cdot p_d)] (\lambda - 1)(\mu - 1), \quad (32)$$

$$D = (\lambda^2 + 2\mu^2 + 2\lambda\mu - 4\lambda - 2\mu + 3)(\mu - 1)^2 + (2\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu$$

$$- 4\mu - 2\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 + 2(\lambda + \mu - 1)(\lambda + \mu - 3)(\lambda - 1)(\mu - 1). \quad (32')$$

En vue des applications, on a intérêt à écrire ces formules dans le système du laboratoire (électrons b au repos) et à faire le choix de paramètres suivant. On pose

$$E_a = m(w + 1), \quad E_c = m(wy + 1), \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \quad (33)$$

en désignant par c l'électron final le plus rapide. Les vecteurs $a n_i$ et $b n_j$ sont pris comme suit:

$$a n_3 = [w(w + 2)^{\frac{1}{2}}, (1 + w) \mathbf{x}_3], \quad b n_3 = (0, \mathbf{x}_3),$$

$$a n_1 = (0, \mathbf{x}_1), \quad b n_1 = (0, \mathbf{x}_1),$$

$$a n_2 = (0, \mathbf{x}_2), \quad b n_2 = (0, \mathbf{x}_2);$$

\mathbf{x}_3 est un vecteur unitaire parallèle à p_a , \mathbf{x}_1 est un vecteur unitaire perpendiculaire à p_a et situé dans le plan de diffusion, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1$. On trouve alors, pour les coefficients λ_{ij} ,

† Nous avons publié cette expression dans une note ¹¹⁾ où nous proposons la mesure de la corrélation des polarisations des faisceaux d'électrons c et d , les électrons a et b n'étant pas polarisés. Malheureusement, l'expression de N_{ij} dans cette note contient des erreurs.

$$\begin{aligned}
 \lambda_{13} &= \lambda_{31} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0, \\
 \Delta \cdot \lambda_{11} &= -y(1-y)[1+w+y(1-y)w(4+w)], \\
 \Delta \cdot \lambda_{22} &= -y(1-y)[1+2w-y(1-y)w^2], \\
 \Delta \cdot \lambda_{33} &= -y(1-y)[(1+w)(1+2w)-y(1-y)w(4+w)], \\
 \Delta \cdot \lambda_{13} &= \Delta \cdot \lambda_{31} = -y(1-y)(1-2y)w[2y(1-y)(2+w)]^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned} \tag{34}$$

avec

$$\Delta = (1+w)^2 - y(1-y)(3+6w+2w^2) + y^2(1-y)^2w^2.$$

On remarque sur ces formules que λ_{11} , λ_{22} , λ_{33} sont symétriques et λ_{13} est anti-symétrique pour l'échange de y et $1-y$. Il est facile de voir que ces symétries sont des conséquences de l'indiscernabilité des particules finales c et d .

Les calculs précédents suggèrent une méthode de mesure de la polarisation d'un faisceau d'électrons relativistes polarisés. On fait tomber ce faisceau sur une cible formée d'une plaque d'un corps magnétique aimanté à saturation. On mesure le rapport des sections efficaces pour deux valeurs opposées du champ magnétisant.

Soient \mathbf{n} et $-\mathbf{n}$ les deux directions successives du champ magnétisant, et σ_+ et σ_- les sections efficaces correspondantes. Comme nous l'avons vu, la polarisation des électrons b est respectivement ${}_b\zeta\mathbf{n}$ et $-{}_b\zeta\mathbf{n}$, où $\mathbf{n} = (0, \mathbf{n})$, et ${}_b\zeta$ est de l'ordre de $-1/13$ pour le fer. En partant de (31), on trouve que la polarisation de l'électron a est alors ${}_a\zeta_i \mathbf{n}_i$, les ${}_a\zeta_i$ satisfaisant l'équation

$${}_b\zeta \sum_{i,j} {}_a\zeta_i \lambda_{ij} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_j = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\sigma_+ + \sigma_-}. \tag{35}$$

En prenant trois directions différentes pour le champ magnétisant, on mesure les trois ${}_a\zeta_i$.

En général, on observera les électrons finaux c et d lorsqu'ils partent symétriquement par rapport à \mathbf{p}_a , ce qui revient à faire $y = 1-y = \frac{1}{2}$ dans les formules (34). Les quantités λ_{ii} sont stationnaires pour cette valeur du paramètre y . Les formules (34) deviennent alors

$$\lambda_{11} = -\frac{4+8w+w^2}{4+8w+9w^2}, \quad \lambda_{22} = -\frac{4+8w-w^2}{4+8w+9w^2}, \quad \lambda_{33} = -\frac{4+8w+7w^2}{4+8w+9w^2}, \tag{36}$$

les autres λ_{ij} étant nuls. Dans ce cas, la polarisation du faisceau a est donnée par

$${}_a\zeta_i = \frac{1}{{}_b\zeta \lambda_{ii}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i)} \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\sigma_+ + \sigma_-}. \tag{37}$$

Ce résultat montre que cette méthode s'applique indifféremment à la mesure des polarisations longitudinale (${}_a\zeta_3$) ou transversales (${}_a\zeta_1$ et ${}_a\zeta_2$) d'un faisceau d'électrons. L'effet à mesurer est $(\sigma_+ - \sigma_-)/(\sigma_+ + \sigma_-)$. Sa dépendance en énergie est donnée par les λ_{ii} de la formule (36).

Nous traçons, dans la figure 1, les courbes $\lambda_{ii}(w)$. Pour la polarisation longitudinale λ_{33} varie très peu avec l'énergie, puisqu'il ne décroît que de

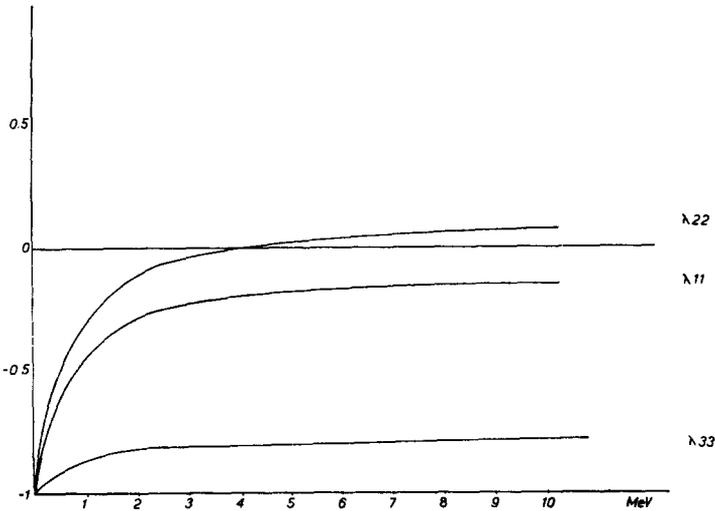


Fig. 1. Les courbes donnent les quantités $\lambda_{ii}(w)$ définies par les éqs. (36). Dans la collision négaton-négation $a + b \rightarrow c + d$, où b est au repos, c et d se partagent également l'énergie cinétique w de l'électron a ; si $a\zeta_i n_i$ et $b\zeta_j n_j$ sont les polarisations respectives de a et de b , la section efficace de la collision est $\sigma = \sigma_0 (1 + \lambda_{ij} a\zeta_i b\zeta_j)$. Les λ_{ij} non diagonaux sont nuls.

1 à 7/9 lorsque w varie de 0 à ∞ (l'approximation faite dans nos calculs n'est certainement plus valable pour des valeurs de $w < 0.2$). Cette mesure de la polarisation longitudinale des électrons s'applique donc dans un domaine d'énergie assez grand.

6. Modification de la Polarisation d'un Faisceau d'Électrons par Diffusion sur des Électrons non Polarisés

Les électrons a sont les électrons d'un faisceau polarisé, de vecteur polarisation $\hat{s} = \sum_i a_i n_i \zeta_i$. Les électrons b sont les électrons non polarisés d'un atome. On suppose encore ici que les électrons a sont assez rapides pour qu'il soit légitime de considérer les électrons b comme au repos dans le système du laboratoire. La matrice densité représentant l'état initial s'écrit avec une normalisation convenable:

$$\rho_i = \frac{1}{4} [1 + a\zeta_i (\tau_i \odot 1)].$$

On cherche la polarisation de l'électron final c (ou d). La matrice densité finale est donnée par la formule

$$\rho_f = M \rho_i M^\dagger = \frac{1}{4} (MM^\dagger + \sum_i a \zeta_i M(\tau_i \odot 1)M^\dagger).$$

La polarisation de l'électron final est obtenue en utilisant la formule (14), soit

$$c \zeta_j = \frac{1}{\text{tr } \rho_f} \cdot \text{tr} [\rho_f(\tau_j \odot 1)].$$

Or on a vu au § 5 que

$$\text{tr } \rho_f = \frac{1}{4} \text{tr } MM^\dagger + \frac{1}{4} \sum_i a \zeta_i \text{tr } M(\tau_i \odot 1)M^\dagger = \frac{1}{4} \text{tr } MM^\dagger.$$

D'autre part on a

$$\text{tr} [\rho_f(\tau_j \odot 1)] = \frac{1}{4} \text{tr} [MM^\dagger(\tau_j \odot 1)] + \frac{1}{4} \sum_i a \zeta_i \text{tr} [M(\tau_i \odot 1)M^\dagger(\tau_j \odot 1)].$$

Par un raisonnement identique à celui déjà utilisé au § 5, on montre que $\text{tr} (MM^\dagger \tau_i) = 0$; finalement on obtient pour $c \zeta_j$ l'expression suivante:

$$c \zeta_j = \sum_i a \zeta_i \frac{\text{tr } M(\tau_i \odot 1)M^\dagger(\tau_j \odot 1)}{\text{tr } MM^\dagger} = \sum_i a \zeta_i C_{ij}. \quad (38)$$

Le calcul de

$$C_{ij} = \frac{\text{tr} [M(\tau_i \odot 1)M^\dagger(\tau_j \odot 1)]}{\text{tr } MM^\dagger}$$

a été fait par les méthodes utilisées au § 5. L'expression de C_{ij} est écrite à l'aide des nombres λ et μ introduits dans ce paragraphe (cf. éq. (32)). On a

$$C_{ij} = \frac{K_{ij}}{D}$$

avec

$$\begin{aligned} K_{ij} = & (a n_i \cdot c n_j) 2(\mu - 1) [(\lambda + \mu - 2)(-\mu^2 - \lambda\mu + 3\lambda + \mu - 3) + 2(\lambda - 1)] \\ & + m^{-2} (a n_i \cdot p_c) (c n_j \cdot p_a) (\mu - 1)^2 [2\lambda + 2\mu - 3] \\ & + m^{-2} [(a n_i \cdot p_c) (c n_j \cdot p_b) + (a n_i \cdot p_d) (c n_j \cdot p_a)] (\mu - 1) [2\mu(\mu - 1) \\ & \quad + (2\mu - 1)(\lambda - 1)] \\ & + m^{-2} [(a n_i \cdot p_d) (c n_j \cdot p_b) (\lambda - 1) [2(\mu - 1)(2 - \mu - \lambda) + \lambda - 1]] \end{aligned} \quad (39)$$

et D donné par (32').

Dans ce qui suit nous allons nous limiter au cas où les électrons c et d partent dans des directions symétriques par rapport à p_a . On choisit $a n_i$ comme au § 5. Les vecteurs $c n_i$ sont pris comme suit:

$$c n_1 = (0, \mathbf{x}'_1) \quad c n_2 = (0, \mathbf{x}_2) \quad c n_3 = [\frac{1}{2}(w^2 + 4w)^{\frac{1}{2}}, (1 + \frac{1}{2}w)\mathbf{x}'_3];$$

le vecteur \mathbf{x}'_3 est un vecteur unitaire parallèle à p_c et \mathbf{x}'_1 est défini par $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}'_3$. Si l'on suppose l'électron a polarisé longitudinalement ($a \zeta_1 = a \zeta_2 = 0$), on a

$$c\zeta_1 = C_{31}\zeta_3, \quad c\zeta_2 = 0, \quad c\zeta_3 = C_{33}a\zeta_3.$$

On voit que l'électron c est polarisé transversalement le long de \mathbf{x}'_1 . Posons

$$\zeta_1 = a\zeta_3, \quad \zeta'_t = c\zeta_1.$$

La polarisation transversale de l'électron final ζ'_t est alors donnée par

$$\zeta'_t = \zeta_1 \left(\frac{2}{w+4} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{8w(1+w)}{9w^2+8w+4} = \zeta_1 f(w). \tag{40}$$

Dans la fig. 2 nous traçons la courbe ζ'_t/ζ_1 en fonction de l'énergie cinétique w de l'électron incident. La polarisation transversale peut alors être

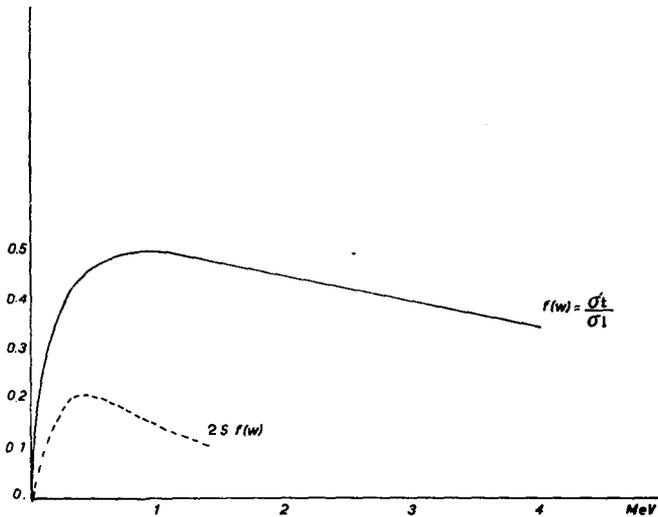


Fig. 2. Dans la collision négaton-négaton $a+b \rightarrow c+d$, le négaton a, d'énergie cinétique w , a une polarisation longitudinale ζ_1 , le négaton b est au repos. Le degré de polarisation transversale de c est $f(w)\zeta_1$. Si c subit une diffusion coulombienne perpendiculaire au plan abcd, l'asymétrie observée sera $2Sf(w)\zeta_1$.

mesurée par une diffusion coulombienne. Si cette diffusion coulombienne est dans le plan des faisceaux a, c, d, les sections efficaces $\sigma(\vartheta)$ et $\sigma(-\vartheta)$ sont égales. Si cette diffusion coulombienne est dans un plan perpendiculaire au plan a, c, d, l'asymétrie $S(\vartheta)$ entre $\sigma(\vartheta)$ et $\sigma(-\vartheta)$ est maximum.

Le schéma d'expérience de la figure 3 est tracé pour $\vartheta = \pm 90^\circ$.

On mesurera le rapport des sections efficaces σ' et σ'' , qui dépend ainsi de ζ_1 :

$$\frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{1+\zeta_1 S f(w)}{1-\zeta_1 S f(w)}, \tag{41}$$

où $f(w)$ est donné par l'éq. (40) et est tracé sur la fig. 2. L'asymétrie $S(\theta)$ dans la diffusion coulombienne d'électrons polarisés a été récemment re-

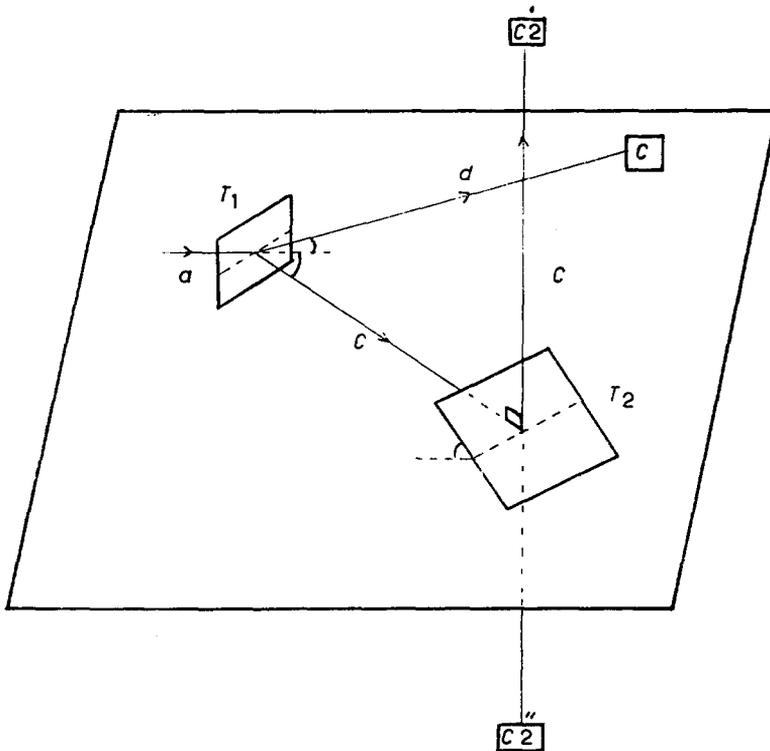


Fig. 3. Schéma d'une expérience pour mesurer la polarisation longitudinale ζ_1 du négaton a par collision avec un négaton b dans une cible T_1 (élément de faible Z). Le négaton c a une polarisation partiellement transversale. Si T_2 est une cible mince d'élément de grand Z, la diffusion coulombienne de c dans T_2 est asymétrique. La mesure du rapport $\frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{\text{coincidences } c, c''_2}{\text{coincidences } c, c'_2}$ permet de mesurer ζ_1 (voir éq. (41)).

calculée pour $Z = 80$ avec l'aide d'une machine électronique par Sherman ¹²). En utilisant ces valeurs numériques pour la diffusion à 90° nous donnons en pointillé dans la fig. 2 le produit $Sf(w)$ qui donne directement l'asymétrie (41) qui serait observée dans l'expérience décrite sur la figure 3.

7. Effets de Polarisation dans les Collisions Positron-négaton

On peut reprendre les études faites aux §§ 5 et 6 en supposant que l'électron incident est un positon. La comparaison des diagrammes décrivant les collisions négaton-négaton et positon-positon permet d'établir une loi de correspondance simple entre les éléments de matrice des deux processus (voir par exemple réf. ⁹), p. 257).

Désignons par p'_a et p'_c les impulsions-énergies du positon initial et du positon final et par p'_b et p'_d celles du négaton initial et du négaton final. La théorie générale des collisions $a'+b' \rightarrow c'+d'$ entre un positon et un négaton se déduit de celle que nous avons exposée au § 4 pour les collisions entre deux négatons par la correspondance suivante:

$$\begin{aligned} p_a &\rightarrow -p'_c & \varepsilon_a \cdot a n_i &\rightarrow \varepsilon'_c \cdot c n'_i \\ p_b &\rightarrow +p'_b & \varepsilon_b \cdot b n_i &\rightarrow \varepsilon'_b \cdot b n'_i \\ p_c &\rightarrow -p'_a & \varepsilon_c \cdot c n_i &\rightarrow \varepsilon'_a \cdot a n'_i \\ p_d &\rightarrow +p'_d & \varepsilon_d \cdot d n_i &\rightarrow \varepsilon'_d \cdot d n'_i \end{aligned}$$

où les $\varepsilon' \cdot n'$ indiquent les états de polarisation.

7.1. DIFFUSION DE POSITONS SUR DES NÉGATONS LIÉS ET ORIENTÉS

La section efficace de diffusion est de la forme

$$\sigma = \sigma_B (1 + \lambda'_{ij} a \zeta'_i b \zeta'_j);$$

σ_B est la section efficace calculée par Bhabha. Posons $\lambda_{ij} = K_{ij}/D$. Les considérations précédentes montrent que K_{ij} et D sont les expressions données par les formules (39). Pour achever la suite du calcul il suffit, dans ces formules, de faire la substitution précédemment définie.

7.2. MODIFICATION DE LA POLARISATION D'UN POSITON PAR DIFFUSION SUR DES NÉGATONS

La polarisation $c \zeta'_i$ du positon après collision est donnée par la formule $c \zeta'_j = \sum C'_{ij} a \zeta'_i$. Dans cette formule $a \zeta'_i$ désigne la polarisation de l'électron incident et $C'_{ij} = N_{ij}/D$. Les quantités N_{ij} et D sont données par les formules (32). Le calcul s'achève en faisant la substitution déjà indiquée.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir des formules explicites.

Il faut noter que la diffusion coulombienne est un analyseur de polarisation (transversale) plus médiocre pour les positons que pour les négatons. Par contre, l'annihilation de positons polarisés avec des négatons orientés peut fournir la base d'une autre méthode de mesure de la polarisation des positons. Le calcul des effets de polarisation pour l'annihilation en deux photons a été faite par Page¹³).

Nous remercions M. Halban, M. Gorodetzky et ses collaborateurs pour les nombreuses discussions que nous avons eues avec eux au sujet des possibilités expérimentales des différentes méthodes que nous avons exposées.

Nous remercions le Service des Poudres et le Comité Scientifique de l'Armée pour leur aide. Nous remercions aussi M. Lévy et le Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de leur hospitalité.

Appendice

Nous utilisons comme tenseur fondamental $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$, $g^{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$. Les deux tenseurs $g_{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$ ont les mêmes éléments. Le produit scalaire est noté avec la convention usuelle de sommation sur les indices muets:

$$a \cdot b = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu.$$

Le tenseur complètement antisymétrique de rang 4 est noté $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\lambda}$ avec $\varepsilon^{0123} = 1$.

Les matrices γ^μ sont définies par

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = -2g^{\mu\nu}.$$

On peut déplacer leur indice ainsi:

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu.$$

Nous utilisons la notation $\bar{p} = i\gamma^\mu p_\mu$. Le symbole * signifie complexe conjugué, † signifie hermitique conjugué. Nous n'écrivons pas les indices spinoriels, par exemple si γ est une matrice et u un spineur, γu doit être lu $\sum_\beta \gamma_{\alpha\beta} u_\beta$ et $u\gamma$ doit être lu $\sum_\alpha u_\alpha \gamma_{\alpha\beta}$. Si A est une matrice telle que $(Ai\gamma^\mu)^\dagger = Ai\gamma^\mu$, le spineur adjoint de u est $u^\dagger = u^* A$.

Nous utilisons la représentation usuelle des matrices de Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous notons le produit tensoriel par \odot .

Bibliographie

- 1) C. N. Yang and T. D. Lee, Phys. Rev. **104** (1956) 254
- 2) F. Bourdelet et L. Michel, à paraître
- 3) L. Michel et A. S. Wightman, Phys. Rev. **98** (1955) 1190
- 4) V. Bargmann et E. Wigner, Proc. Nat. Acad. Sc. **34** (1948) 211
- 5) Voir par ex. A. Messiah, Cours de Mécanique quantique, Tome 3, XVI, 47 (Saclay 1954)
- 6) H. A. Tolhoek, Revs. Mod. Phys. **28** (1956) 277
- 7) W. H. Louisell, R. W. Pidd et H. R. Crane, Phys. Rev. **94** (1954) 7
- 8) Cf. réf. 3) et notes ronéotypées de l'Université de Princeton sur la polarisation des particules de masse nulle et de spin $\frac{1}{2}$
- 9) Jauch and Rohrlich, Theory of photons and electrons (Cambridge, Mass., 1955)
- 10) R. G. Newton, Phys. Rev. **103** (1956) 385
- 11) C. Bouchiat et L. Michel, C. R. Ac. Sc. Paris **243** (1956) 642
- 12) N. Sherman, Phys. Rev. **103** (1956) 1602
- 13) L. A. Page, Phys. Rev. **106** (1956) 394
- 14) C. Bouchiat et L. Michel, Phys. Rev. **106** (1957) 170