IL NUOVO CIMENTO Vol. XXI, N. 3 1° Agosto 1961

Sur les relations entre charges et spin.

F. Lurçat
Institut de Physique, Faculté des Sciences - Lille

L. Michel
Physique Théorique et Hautes Energies - Orsay

(ricevuto il 6 Giugno 1961)

Une des énigmes que pose actuellement l'étude des particules élémentaires est la suivante (1): parmi les trois (2) espèces de charges strictement conservées (3): la charge électrique q, la charge baryonique (4) b et la charge leptonique (5) l, la charge électrique est la seule que puissent posséder les mésons, qui sont des particules de spin entier. Par contre, il n'existe aucune particule de spin demi-entier sans charge, soit baryonique, soit leptonique. Cela peut être résumé en une formule:

$$(1) \qquad (-1)^{2j} = (-1)^{b+l}\,,$$

vraie pour tout état physique (j désigne le moment cinétique).

Nous nous proposons de montrer comment une relation de cette forme (équation (7)) peut apparaître comme conséquence d'axiomes admis ou admissibles par de nombreux physiciens (axiomes a, b, c, d).

a) Les observables en mécanique quantique sont représentées par des opérateurs hermitiens $A = A^*$, sur un espace d'Hilbert $\mathscr{H}$.

b) Il existe un système complet d'observables commutatives.

Pour déduire de *a*) et *b*) les propriétés qui nous seront nécessaires, nous suivrons l'excellent exposé de Jauch (6) auquel

(1) Voir par exemple D. H. Wilkinson in: *Turning points in physics* (Amsterdam, 1959), p. 169.

(2) Nous laissons au lecteur le soin de généraliser au cas où il existerait plusieurs charges pour les leptons (par exemple: eν d'une part, μν' d'autre part).

(3) Pour la discussion des preuves expérimentales de la conservation des charges, voir: G. Feinberg and M. Goldhaber: *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **45**, 1301 (1959).

(4) Le concept de charge nucléonique semble avoir été introduit par E. Wigner: *Proc. Am. Phil. Soc.*, **93**, 521 (1949). La généralisation aux hypérons, après la découverte de ces derniers, était évidente.

(5) Le concept de charge leptonique semble avoir été introduit par E. Fermi vers 1950 (non publié). La charge leptonique attribuée à chaque lepton a varié au cours des dix dernières années (voir par ex.: E. J. Konopinski and H. M. Mahmoud: *Phys. Rev.*, **92**, 1045 (1953); Ya. B. Zeldovich: *Doklady Akad. Nauk USSR*, **91**, 1317 (1953)); actuellement elle semble fixée à la même valeur pour e^-, μ^-, ν.

(6) J. M. Jauch: *Helv. Phys. Acta*, **33**, 711 (1960).

nous renvoyons le lecteur pour plus de détails.

Résumons d'abord les notions mathématiques utilisées:

Si $\mathscr{D}$ est un ensemble d'opérateurs sur $\mathscr{H}$ tel que $D_1 \in \mathscr{D}$, $D_2 \in \mathscr{D}$ implique $\alpha D_1 \in \mathscr{D}$, $D_1 + D_2 \in \mathscr{D}$, $D_1 D_2 \in \mathscr{D}$, $D_1^* \in \mathscr{D}$ (α est un nombre complexe), il est appelé une $*$-algèbre.

On appelle commutant [7] d'un ensemble d'opérateurs $\mathscr{M}$ l'ensemble $\mathscr{M}'$ des opérateurs bornés commutant avec tous les opérateurs de $\mathscr{M}$. On pose $\mathscr{M}'' = (\mathscr{M}')'$, etc.

Si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont des ensembles d'opérateurs bornés, $\mathscr{M}'' \supset \mathscr{M}$; de plus, l'inclusion $\mathscr{N} \supset \mathscr{M}$ entraîne $\mathscr{M}' \supset \mathscr{N}'$; en particulier, si $\mathscr{N} = \mathscr{M}''$, $\mathscr{M}' \supset (\mathscr{M}'')' = \mathscr{M}'''$; et puisqu'on a aussi $\mathscr{M}''' = (\mathscr{M}')'' \supset \mathscr{M}'$, on a $\mathscr{M}' = \mathscr{M}'''$.

Si $\mathscr{M}$ est une $*$-algèbre et si $\mathscr{M} = \mathscr{M}''$, $\mathscr{M}$ est appelée algèbre de von Neumann.

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des observables; puisque ce sont des opérateurs hermitiens, $\mathscr{C}'$ est une $*$-algèbre et $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ sont des algèbres de von Neumann que nous noterons $\mathscr{N}'$ et $\mathscr{N}$. On dit que $\mathscr{N}$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\mathscr{C}$.

JAUCH [6] montre que l'axiome *b*) équivaut à:

b') Il existe une sous-algèbre abélienne $\mathscr{B}$ de $\mathscr{N}$ qui est maximale, c'est-à-dire $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$.

De $\mathscr{B} \subset \mathscr{N}$ résulte $\mathscr{B}' \supset \mathscr{N}'$; donc le commutant $\mathscr{N}'$ est abélien. On dit alors (référence [8], p. 120) que l'algèbre $\mathscr{N}$ est discrète. De plus, $\mathscr{N}' \subset \mathscr{B}' = \mathscr{B}$ implique que $\mathscr{N}'$ est le centre de $\mathscr{N}$ (c'est-à-dire $\mathscr{N}' \cap \mathscr{N}$).

$\mathscr{N}'$ contient en particulier les opérateurs Q, B, L correspondant aux charges électrique, baryonique et leptonique. Nous faisons l'hypothèse physique que $\mathscr{N}'$ est engendré par Q, B, L.

La décomposition spectrale de $\mathscr{N}'$ détermine une somme directe [9]

$$\mathscr{H} = \oplus_\lambda \mathscr{H}(\lambda)\,,$$

d'espaces d'Hilbert $\mathscr{H}(\lambda)$. Seuls les éléments de ces espaces (et non tout élément de $\mathscr{H}$) représentent des états physiques. Deux états représentés par des vecteurs appartenant à des $\mathscr{H}(\lambda)$ différents sont dits séparés par une règle de supersélection. Les règles de supersélection étant ainsi obtenues indépendamment de l'invariance relativiste, la règle obtenue usuellement à partir de l'invariance par rapport à $\mathscr{L}_0$ (supersélection entre les états de spin entier et demi-entier) doit être incluse dans les précédentes; d'où l'existence d'une relation entre $(-1)^{2j}$ et les charges. Afin de préciser la nature de cette relation, nous allons maintenant formuler l'invariance relativiste, en nous limitant ici au sous-groupe connexe $\mathscr{L}_0$ de $\mathscr{L}$, groupe de Lorentz inhomogène (autrement dit, nous ne considérerons pas les réflexions d'espace et de temps).

c) Il existe un isomorphisme entre $\mathscr{L}_0$ et un sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathscr{N}$. Les charges étant invariantes par les transformations de $\mathscr{L}_0$, les automorphismes de $\mathscr{N}$ correspondants laissent fixes les éléments de $\mathscr{N}'$. Nous pouvons alors utiliser le théorème énoncé à la ref. [8], p. 255-256.

Tout automorphisme Δ d'une algèbre de von Neumann discrète $\mathscr{N}$, qui laisse fixes les éléments du centre de cette algèbre, peut s'écrire:

$$A \xrightarrow{\Delta} UAU^{-1}\,, \tag{2}$$

où U est un opérateur unitaire appartenant à $\mathscr{N}$.

Quels sont tous les opérateurs uni-

[7] Pour la définition précise de la commutation avec un opérateur non borné, voir la référence [6].

[8] J. DIXMIER: *Les algébres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)* (Paris, 1957).

[9] Ici, pour notre $\mathscr{N}'$; JAUCH (réf. [6]) envisage la cas plus général d'une intégrale directe.

3143

taires qui réalisent l'automorphisme Λ? Si U_1 et U_2 sont deux tels opérateurs, $U_1U_2^{-1}$ est un élément unitaire de $\mathcal{N}'$. Appellons $\mathscr{C}$ l'ensemble des opérateurs unitaires de $\mathcal{N}'$. $\mathcal{N}'$ étant une $*$-algèbre, $\mathscr{C}$ est un groupe. Appelons $\mathscr{U}$ l'ensemble des U pour tous les $\Lambda\in\mathscr{L}_0$: $\mathscr{U}$ est un groupe homomorphe à $\mathscr{L}_0$. Les U qui correspondent à l'identité de $\mathscr{L}_0$ sont les éléments de $\mathscr{C}$, sous-groupe invariant de $\mathscr{U}$.

Notons que $\mathscr{C}$ est dans le centre de $\mathscr{U}$; d'après l'axiome c) le quotient $\mathscr{U}/\mathscr{C}$ est isomorphe à $\mathscr{L}_0$; nous noterons cela:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathscr{C}\subset\text{centre}\,(\mathscr{U})\,,\\ \mathscr{U}/\mathscr{C}\sim\mathscr{L}_0\,.\end{array}\right. \tag{3}$$

Il existe plusieurs solutions au problème: étant donné deux groupes $\mathscr{C}$ abélien et $\mathscr{L}_0$, trouver tous les groupes $\mathscr{U}$ tels que $\mathscr{C}$ soit dans le centre de $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}/\mathscr{C}\sim\mathscr{L}_0$ (relation (3)). On dit aussi: trouver toutes les extensions centrales de $\mathscr{L}_0$ par $\mathscr{C}$. Nous exposerons ailleurs la solution de ce problème [10].

Les restrictions à un $\mathscr{H}(\lambda)$ de Q, B, L et des éléments de $\mathscr{C}$ sont des multiples de l'identité qui sont respectivement de la forme: q, b, l et $\exp[if(q,b,l)]$ où f est une fonction réelle. Les $\mathscr{H}(\lambda)$ peuvent être étiquetés par les triplets d'entiers (q,b,l). La méthode usuelle pour obtenir ces résultats, c'est d'exiger l'invariance par rapport au groupe de jauge $\mathscr{A}$, dont les éléments sont

$$\exp[i(\alpha_qQ+\alpha_bB+\alpha_lL)]\,, \tag{4}$$

(les α sont des nombres réels modulo 2π). Les représentations linéaires irréductibles de $\mathscr{A}$ sont en effet

$$\exp[i(\alpha_qq+\alpha_bb+\alpha_ll)]\,, \tag{5}$$

et sont caractérisées par les triplets d'entiers q, b, l.

[10] F. LURÇAT et L. MICHEL: à paraître.

En fait, dans les théories usuelles, on ne considère pas le groupe $\mathscr{C}$, et on se contente d'utiliser le groupe de jauge $\mathscr{A}$. Ceci nous amène à poser:

d) Les transformations de Lorentz (éléments de $\mathscr{L}_0$) sont représentées à une transformation de jauge près.

Dans le langage utilisé précédemment, cela revient à dire que le groupe d'invariance de la théorie est un groupe $\mathscr{E}$, qui est une extension centrale de $\mathscr{L}_0$ par $\mathscr{A}$.

Pour le groupe $\mathscr{A}$ défini par (4), on montre [10] que les extensions inéquivalentes sont caractérisées par un élément d'ordre 2 (racine carrée de l'unité) de $\mathscr{A}$, qui correspond à la «rotation de 2π». Le groupe $\mathscr{A}$ possède 8 racines carrées de l'unité, qui sont

$$\exp[i\pi(\varepsilon_qQ+\varepsilon_bB+\varepsilon_lL)]\,, \tag{6}$$

avec $\varepsilon=0$ ou 1.

Par suite, pour un état de moment cinétique j, de charges q, b, l, on a la relation

$$(-1)^{2j}=(-1)^{\varepsilon_q q+\varepsilon_b b+\varepsilon_l l}\,. \tag{7}$$

Les relations (7) et (1) doivent être compatibles quels que soient q, b, l; cette condition détermine de façon unique le groupe $\mathscr{E}$:

$$\varepsilon_q=0\,,\qquad \varepsilon_b=\varepsilon_l=1\,. \tag{8}$$

On peut remarquer que, contrairement à ce qui semble généralement admis, ce groupe n'est pas le produit direct de $\mathscr{L}_0$ par $\mathscr{A}$ (qui correspondrait à $\varepsilon_q=\varepsilon_b=\varepsilon_l=0$). Nous reviendrons ultérieurement sur les conséquences physiques de ce fait.

* * *

L'un de nous (F. L.) remercie M. JEAN de l'avoir accueilli au Laboratoire de Physique Nucléaire d'Orsay, Groupe I.