

COURS 5

**CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES
DÉFAUTS ET DES
CONFIGURATIONS DES MILIEUX ORDONNÉS**

Louis MICHEL

*Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91440 Bures-sur-Yvette, France*

Table

1. Introduction	364
2. Les groupes d'homotopie	366
2.1. Exemple 1: $X = S_1$	366
2.2. Exemple 2: $X = R^2 - \{0\}$	367
2.3. Digression	367
2.4. Exemple 3 et digression: $X = R^2 - \{a, b\}$	368
2.5. Autre famille d'exemples	369
2.6. Produit topologique; espaces contractibles	369
2.7. Le groupe d'homotopie du groupe des rotations. Son recouvrement universel	370
3. Quelques concepts fondamentaux au sujet des groupes	372
3.1. Sous-groupes invariants, groupes quotients	372
3.2. Le groupe d'homotopie π_0	374
3.3. Action de groupe, orbite, groupe d'isotropie	374
3.4. Orbites du groupe des rotations $SO(3)$ et de son recouvrement $SU(2)$	375
3.5. Homotopie des orbites de $SO(3)$	377
4. Etude topologique des défauts	378
4.1. L'orbite des états	378
4.2. La classification homotopique des défauts	378
4.3. Application aux champs (continus) de vecteurs	379
4.4. Les défauts des nématiques	380
5. Perspectives et conclusion	381
5.1. Succès de la classification homotopique	381
5.2. Puissance de la classification homotopique	382
5.3. Limitation de la classification homotopique	382
Références	383

R. Balian et al., eds.

Les Houches, Session XXXV, 1980 – Physique des Défauts/Physics of Defects

© North-Holland Publishing Company, 1981

1. Introduction

Volterra au début du siècle, puis la majorité des physiciens qui étudièrent les défauts des milieux ordonnés (e.g. cristaux, cristaux liquides) utilisaient l'homotopie comme M. Jourdain faisait de la prose. A ma connaissance c'est Rogula [1] en 1975 qui le premier souligna l'utilité de l'homotopie dans l'étude des défauts mais sans en tirer vraiment d'applications. L'année suivante Toulouse et Kléman [2], qui ignoraient le travail de Rogula, furent les premiers à faire une importante prédiction physique basée sur une classification homotopique des défauts des milieux ordonnés définis par un paramètre d'ordre. Il y avait alors beaucoup d'autres prédictions contradictoires entre elles, sur les défauts possibles dans la phase superfluide A de He^3 qui avait été découverte quelques années auparavant. Toulouse et Kléman expliquèrent que les seules singularités qu'on pourrait trouver seraient des lignes de vortex s'annihilant par paires (comme les lignes des nématiques). L'observation expérimentale n'a pas encore pu le vérifier.

Remarquant que la symétrie H d'un milieu parfaitement ordonné provient d'une symétrie G brisée spontanément (en général G est le groupe Euclidien ou le groupe de jauge), on en déduit que l'espace des états internes est l'orbite $[G : H]$ du groupe G ; nous montrions ensemble [3] la généralité de cette approche et nous l'appliquâmes explicitement aux cristaux. Volovik et Mineev étaient parmi les auteurs de mauvaises prédictions sur les singularités de la phase He^3A ; mais ils apprirent rapidement de leurs collègues mathématiciens ce que l'homotopie pouvait faire pour eux. Tout en citant Toulouse et Kléman dans leur préirage, ils retrouvèrent indépendamment leur résultat [4] et ils appliquèrent la même méthode pour les cholestériques [5]: Kléman et moi le firent pour les smectiques [6, 7].

Un an après la lettre de Toulouse et Kléman, dans une revue [8] qu'on me demanda de faire à un colloque international je citais déjà une douzaine d'articles sur ce sujet, trois ans après il doit y en avoir cinq fois

plus. Je me contenterai donc de ne citer ici que les livres ou articles de revue. Je vous recommande d'abord les deux volumes de Kléman [9] "Points, Lignes, Parois" (spécialement le chapitre 10; mais il faut aussi étudier les nombreuses figures des chapitres précédents). Il existe un long article de Mineev [10] en russe. A l'école des Houches de 1978 un excellent cours de Poenaru sur l'homotopie et la classification des défauts [11]. Il est peut-être un peu difficile mais il se termine par un intéressant problème mathématique de Sullivan et Poenaru. La plus courte introduction à la théorie de l'homotopie en moins de quatre pages se trouve dans [8]. Mais vous pouvez aussi vous sentir plus en confiance avec un collègue qui est récemment passé par votre situation: Comment apprendre l'homotopie? Et qui le raconte avec des illustrations très intéressantes dans un long article de *Review of Modern Physics*: Mermin [12].

Je voudrais vous rappeler enfin que la théorie de l'homotopie a beaucoup d'autres applications en physique, comme le soulignait déjà Finkelstein [13] en 1966; voir aussi sa récente application avec Weil [14] dans un modèle sur la formation des galaxies. En 1975, deux groupes soviétiques [15, 16] utilisèrent l'homotopie pour la classification, en théorie de jauge, des monopoles introduits l'année précédente par t'Hooft et Polyakov. (De tels monopoles auraient une masse de l'ordre de 10^4 fois celle du proton s'ils existaient dans une théorie unifiée de l'électromagnétisme et des couplages faibles; ce n'est pas le cas dans la version $U(2)$ de Glashow, Salam et Ward, Weinberg, t'Hooft, qui est favorisée actuellement*.) Les instantons correspondent aussi à des classes d'homotopie. Mon récent article dans *Review of Modern Physics* [17] explique brièvement ces autres applications. Vous en trouverez encore d'autres (intégrales sur les chemins de Feynmann) dans le cours de Thomas [18].

Il n'est pas question de refaire ici un nouveau cours sur l'homotopie. Je ne dispose d'ailleurs, de guère plus de temps que ma conférence [8]. Je ne peux donc que vous encourager à faire votre choix dans les revues que j'ai citées. Et si vous voulez vraiment apprendre l'homotopie, allez aux sources: ces revues citent quatre ou cinq livres; le plus utile et facile pour les physiciens est probablement celui de Steenrod [19]. Je vais simplement essayer ici d'illustrer par des exemples très simples les idées de base sur le sujet de ces deux conférences.

*Mais des monopoles très lourds existeraient dans le modèle théorique le plus répandu qui unifie actuellement la théorie électromagnétique-faible et la chromodynamique (dont dérivent les forces nucléaires).

2. Les groupes d'homotopie

2.1. Exemple 1: $X = S_1$

Considérons une fonction continue: $S_1 \xrightarrow{f} S_1$ définie sur le cercle S_1 (= sphère à une dimension) et à valeur dans S_1 . Pour dire cela, la majorité d'entre vous dirait: soit $\omega = f(\varphi)$ où ω et φ sont des angles (donc définis modulo 2π). De plus nous convenons que $f(0) = 0$. Cette fonction continue f définit sans ambiguïté une fonction $X \xrightarrow{\tilde{f}} R$, $\tilde{\omega} = \tilde{f}(\tilde{\varphi})$ où $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi] = X$ (l'intervalle fermé) et $\tilde{\omega}$ est un nombre réel. Un réflexe des mathématiciens est de considérer les deux ensembles des fonctions continues auxquels appartiennent f et \tilde{f} c'est-à-dire $\mathfrak{F}_0(S_1, S_1)$ (ensemble des fonctions continues $S_1 \xrightarrow{f} S_1$, $f(0) = 0$) et $\mathfrak{F}(X, R)$. La correspondance $f \rightarrow \tilde{f}$ définit une application injective

$$\mathfrak{F}_0(S_1, S_1) \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{F}(X, R) \quad (1)$$

($\Phi(f_1) = \Phi(f_2) = \tilde{f}$ implique $f_1 = f_2$) qui n'est pas surjective: toute fonction \tilde{f} de $\mathfrak{F}(X, R)$ ne peut pas être obtenue comme l'image par Φ d'une fonction $f \in \mathfrak{F}(S_1, S_1)$. En effet $\tilde{f} = \Phi(f)$ satisfait

$$\tilde{f}(2\pi) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ (} n \text{ entier positif, nul ou négatif)}. \quad (2)$$

On voit donc que l'ensemble des fonctions $\mathfrak{F}_0(S_1, S_1)$ est divisé en une infinité dénombrable de classes, caractérisées par un entier n . La fonction constante $f(\varphi) = 0$ correspond à $n = 0$. La fonction identique $f(\varphi) = \varphi$ correspond à $n = 1$. La fonction $f(\varphi) = -\varphi$ correspond à $n = -1$. A l'intérieur de chaque classe, chaque fonction peut-être déformé continuellement dans n'importe quelle autre fonction; on dit alors qu'elles sont homotopes et on notera $f_0 \sim f_1$. Techniquement cela veut dire qu'on peut trouver dans $\mathfrak{F}(S_1 \times \Lambda, S_1)$ où $\Lambda = [0, 1]$ une fonction (continue) $F(\varphi, \lambda)$ qui satisfait

$$F(0, \lambda) = 0, \quad F(\varphi, 0) = f_0(\varphi), \quad F(\varphi, 1) = f_1(\varphi). \quad (3)$$

Un prototype de fonction pour chaque classe d'homotopie est donné par $\tilde{f}(\varphi) = n\varphi$: lorsque φ fait le tour du cercle dans le sens positif $f(\varphi)$ fait n tours (comptés algébriquement). La restriction $\varphi(0) = 0$ est purement technique et non esthétique. On peut en ajoutant une constante aux fonctions, étendre les classes d'homotopie à tout l'ensemble $\mathfrak{F}(S_1, S_1)$. On voit de plus que l'addition algébrique des nombres de tours forme le groupe additif \mathbb{Z} des entiers: il existe donc une structure de groupe sur les

classes d'homotopie. Nous écrivons:

$$\pi_1(S_1) = Z$$

où l'indice 1 de π correspond à l'indice du premier S de $\mathfrak{F}(S_1, S_1)$ et la "variable" S_1 est le second S_1 de $\mathfrak{F}(S_1, S_1)$. C'est cette variable que nous appelons X et faisons varier dans les exemples suivants:

2.2. Exemple 2: $X = R^2 - \{0\}$

Le plan réel est noté R^2 ; on lui enlève le point 0 pour obtenir X . On choisit arbitrairement un point $x_0 \in X$. L'ensemble $\mathfrak{F}_0(S_1, X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur le cercle S_1 , à valeur dans X et satisfaisant $f(0) = x_0$. L'image de f est donc une courbe fermée. Intuitivement, étant données deux fonctions $f_0, f_1 \in \mathfrak{F}_0(S_1, X)$, les courbes fermées pourront se transformer continûment l'une dans l'autre si et seulement si elles font le même nombre ($n \in \mathbb{Z}$) de tours autour de 0. On peut alors définir la fonction $F(\varphi, \lambda)$ satisfaisant: F (voir 2)

$$F(0, \lambda) = x_0, \quad F(\varphi, 0) = f_0(\varphi), \quad F(\varphi, 1) = f_1(\varphi). \quad (4)$$

Et nous écrivons encore

$$\pi_1(x_0, R^2 - \{0\}) = Z. \quad (5)$$

La loi de groupe correspond à la composition des lacets (= courbes fermées passant par x_0): on parcourt (à vitesse double) le premier $f(\varphi)$ puis le second $g(\varphi)$:

$$(g_*f)(\varphi) = \begin{cases} f(2\varphi), & 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ g(2\varphi - 2\pi), & \pi \leq \varphi \leq 2\pi (= 0). \end{cases} \quad (6)$$

Pour vérifier que nous avons bien défini une loi de groupe, le lecteur consciencieux rencontrera une première difficulté. La loi (6) n'est pas associative sur l'ensemble des lacets; elle le devient lorsqu'on passe aux classes d'homotopie. On vérifie facilement alors que l'élément neutre du groupe: $n = 0$, correspond à la classe d'homotopie de C , la fonction constante: $C(\varphi) = x_0$.

2.3. Digression

C'est par honnêteté que nous avons mentionné x_0 dans l'équation (5). Avec quelques efforts on peut s'en débarrasser.

Il est temps que le lecteur cherche dans un des articles cités, ou mieux encore dans un livre de mathématiques (un des plus brefs étant Hilton

[20] ch. 2) les preuves détaillées, pour un X arbitraire, de la construction de $\pi_1(x_0, X)$. En lisant un peu plus loin il verra que sans difficultés supplémentaires on construit $\pi_n(x_0, X)$ sur les classes d'homotopie de $\mathcal{F}_0(S_n, X)$ grâce à l'astuce suivante: la sphère S_n est topologiquement équivalente (techniquement on dit: est homéomorphe) au cube à n dimension Γ_n dont tous les points de la frontière $\partial\Gamma_n$ (= surface) du cube sont identifiés (vérifiez le pour $n = 2$ avec votre mouchoir!). Précisément, les fonctions de $\mathcal{F}_0(S_n, X)$ sont les fonctions continues (à valeur dans X) de n variables; $t_i \in [0, 1]$ avec $f(t_1, \dots, t_n) = x_0$ si au moins l'un des $t_i = 0$ ou 1. Le produit (6) est alors étendu à ces fonctions en ne faisant rien pour les variables autres que t_1 .

$$g_*f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (6')$$

On a donc défini les groupes $\pi_n(x_0, X)$ pour tous les $n > 0$. Si vous êtes curieux vous verrez une preuve typique montrant que pour $n > 1$ ces groupes sont abéliens. Il n'est pas difficile de montrer que $\pi_n(S_1) = 0$ pour $n > 1$. Par contre calculer $\pi_n(S_m)$ pour $n > m$ est un problème difficile et non encore résolu pour $n - m$ assez grand. Vous pouvez certainement vous prouver à vous même que $\pi_1(S_m) = 0$ pour $1 < m$ et c'est assez facile de l'étendre à $n < m$.

$$n < m \quad \pi_n(S_m) = 0. \quad (7)$$

Pour $n = m$ je vous donne le résultat

$$\pi_n(S_n) = Z. \quad (7')$$

Vous ne trouverez pas la preuve dans des articles de physiciens, ni même dans Steenrod [15]. Vous la trouverez par exemple dans [20 Theor. 2.6] ou dans le petit livre de 64 pages de Milnor [21] (une merveille pédagogique, consacrée à la topologie différentielle).

On n'écrit plus le x_0 : $\pi_n(x_0, S_n) = Z$ quand, après quelques efforts techniques, on peut s'en débarrasser. Ce ne sera pas toujours le cas comme nous allons bientôt le voir. Nous allons étudier d'autres exemples de $\pi_1(X)$. Lorsque $\pi_1(X)$ est trivial on dit que X est *simplement* connexe et par déformation continue tous les lacets peuvent être réduits au point x_0 .

2.4. Exemple 3 et digression: $X = R^2 - \{a, b\}$

Nous supprimons les points a et b du plan. Un lacet partant de x_0 fera m_1 tours autour de a , puis n_1 autour de b , puis m_2 autour de a , n_2 autour de b , m_3 autour de a , etc... . Par déformation continue on ne peut ni

modifier ces nombres entiers (≥ 0) ni les permuter. Le groupe engendré $\pi_1(x_0, R = \{a, b\})$ est donc non commutatif et infini (et s'appelle le groupe libre à deux générateurs). Si on change le "point de base" x_0 en x_1 , on obtient bien sûr le même groupe, mais la correspondance entre les lacets en x_0 et ceux en x_1 dépend du chemin qu'on choisit pour relier x_0 à x_1 (voir, e.g. la réf. [17, fig. 6]). Les différents choix possibles correspondent à un automorphisme intérieur du groupe $\pi_1 : \xi \rightarrow \alpha \xi \alpha^{-1}$. On peut donc supprimer toute référence à x_0 mais les classes d'homotopie correspondent alors aux classes de conjugaison du groupe $\pi_1(\xi_1 \sim \xi_2$ s'il existe $\alpha \in \pi_1, \alpha \xi_1 \alpha^{-1} = \xi_2$); elles ne forment pas un groupe. De façon similaire les différents chemins possibles pour relier l'ancien et le nouveau point de base correspondent à différents automorphismes des π_n : ils sont induits par une action de π_1 sur chaque π_n . (Une telle action est définie par un homomorphisme $\pi_1 \rightarrow \text{Aut}(\pi_n)$ du groupe π_1 dans le groupe d'automorphisme de π_n .) Nous en verrons plus loin l'illustration physique. Lisez la preuve des résultats suivants: (réf. [19, § 16]) si G est un groupe de Lie, $\pi_1(G)$ est abélien et il agit trivialement sur les $\pi_n(G)$ (réf. [19, § 16]). (Le premier résultat est valable pour tout groupe topologique.)

2.5. Autre famille d'exemples

Soit T_n le tore à n dimension. ($S_1 = T_1$). Le cas $n = 2$ est bien connu des lecteurs. On peut prendre par exemple deux angles comme coordonnées: φ, ψ où l'ensemble $\{\varphi, 0\}$ est le cercle de gorge et $\{\varphi_0, \psi\}$ est le cercle de la section d'azimut φ_0 . On obtient donc le tore à partir d'un plan R^2 en identifiant tous les points $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ dont les coordonnées diffèrent par des multiples entiers de 2π . A un chemin continu de $\tilde{\varphi} = 0, \tilde{\psi} = 0$ à $\tilde{\varphi} = 2\pi m, \tilde{\psi} = 2\pi n$ correspondra un lacet basé en $x_0 = (0, 0)$ sur le tore; réciproquement, à tout lacet sur le tore correspond un chemin de $0, 0$ à un point du réseau $\{2\pi m, 2\pi n\}$. Les classes d'homotopie sont étiquetées par les points du réseau et le groupe $\pi_1(T_2)$ est le groupe de translation du réseau. Il est isomorphe au produit direct $Z \times Z = Z^2$. On peut facilement généraliser à n dimensions. Nous serons, bien sûr, particulièrement intéressés par le cas $n = 3$.

2.6. Produit topologique; espaces contractibles

Deux angles formant exactement un système de coordonnées sur le tore T_2 , on dit que T_2 est le produit topologique de 2 cercles et on note $T_2 = S_1 \times S_1 = (S_1)^2$. Plus généralement $T_n = (S_1)^n$. Nous avons vu que $\pi_1(T_2) = Z^2 = (\pi_1(S_1))^2$. Ce résultat est général (et la preuve vaut la

peine d'être étudiée). Les groupes d'homotopie d'un produit topologique sont les produits directs des groupes d'homotopie.

$$\pi_n(x_0 \times y_0, X \times Y) = \pi_n(x_0, X) \times \pi_n(y_0, Y). \quad (8)$$

(Rappelons que le produit direct $G \times G'$ de deux groupes G et G' a pour éléments l'ensemble des paires (g, g') , $g \in G$, $g' \in G'$ et comme loi de groupe $(g_1, g'_1), (g_2, g'_2) = (g_1 g_2, g'_1 g'_2)$). Intuitivement, un espace topologique contractible C peut être contracté en un point par déformation continue. Cela peut être dit élégamment: dans $\mathcal{F}(C, C)$ la fonction identité $f(x) = x$ et les fonctions constantes sont homotopes. C'est alors un jeu (vérifiez la solution dans un bon livre ou article) de prouver que

$$\pi_n(x_0, C) = 0 \quad (9)$$

pour tout n . Exemples d'espaces contractibles: R^n , la boule B_n , une nappe d'hyperboloïde à deux nappes, R^+ (l'ensemble des réels > 0), le produit topologique d'espaces contractibles.

En appliquant les équations (8) et (9) on obtient

$$\pi_n(X \times C) = \pi_n(X). \quad (10)$$

Par exemple $X = R^{m+1} - \{0\} = S_m \times R_+$ d'où

$$\pi_n(R^{m+1} - \{0\}) = \pi_n(S_m). \quad (11)$$

Plus généralement si $\mathcal{K}(X, Y)$ est l'ensemble des classes d'homotopies des fonctions continues sur X à valoir dans Y et C, C' deux espaces topologiques contractibles, c'est un exercice facile de prouver que

$$\mathcal{K}(X \times C, Y \times C') = \mathcal{K}(X, Y). \quad (12)$$

2.7. Le groupe d'homotopie du groupe des rotations. Son recouvrement universel

Dans notre espace (à 3 dimensions) une rotation est donnée par un axe de rotation (défini par un vecteur unitaire \mathbf{n}) et un angle θ (défini modulo 2π). De plus (\mathbf{n}, θ) et $(-\mathbf{n}, 2\pi - \theta)$ représentent la même rotation. Nous pouvons donc représenter la rotation (\mathbf{n}, θ) par le point $\theta\mathbf{n}$, (extrémité du vecteur de longueur θ dirigé dans la direction \mathbf{n}) $0 \leq \theta \leq \pi$ avec une ambiguïté pour les rotations d'angle π . L'ensemble des rotations (= l'espace topologique du groupe des rotations) est donc la boule du rayon π mais avec identification des points diamétralement opposés sur la surface. Le sous-groupe des rotations autour d'un axe \mathbf{n} est représenté par le diamètre défini par \mathbf{n} . C'est bien un lacet (de base $\theta, 0 = 0$) puisque les extrémités sont identifiées, il ne peut-être réduit à 0 à cause

des points sur la frontière. En fait π_1 a deux éléments. Nous notons $O(n)$ le groupe des matrices orthogonales $n \times n$ et $SO(n)$ le sous-groupe des matrices de déterminant 1. Nous venons donc de donner que

$$\pi_1(SO(3)) = Z_2 \quad (13)$$

en notant Z_n le groupe cyclique de n éléments.

Soit τ_i les matrices de Pauli et

$$u(\mathbf{n}, \theta) = e^{-i\theta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} / 2} = I \cos \frac{1}{2}\theta - i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \sin \frac{1}{2}\theta. \quad (14)$$

Les matrices u sont unitaires; $uu^* = I$ et ont pour déterminant 1 (et trace, $2 \cos \frac{1}{2}\theta$). On appelle $SU(n)$ le groupe des matrices unitaires $n \times n$ de déterminant 1. On vérifie que toute matrice de $SU(2)$ différente de $-I$ peut s'écrire de façon unique sous la forme (14) avec $0 \leq \theta < 2\pi$. De plus pour $\theta = 2\pi$, $u(\mathbf{n}, 2\pi) = -I$ indépendamment de \mathbf{n} . L'espace topologique du groupe $SU(2)$ est donc la boule B_3 de rayon 2π avec tous les points de la surface identifiés. Comme nous l'avons déjà remarqué, cela définit la sphère S_3 . (On peut aussi noter que toute matrice de $SU(2)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

de déterminant $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ soit $\alpha_R^2 + \alpha_I^2 + \beta_R^2 + \beta_I^2 = 1$, équation de S_3). Tout sphère S_n , $n > 1$ est simplement connexe; donc

$$\pi_1(SU(2)) = 0. \quad (15)$$

La relation entre le groupe des rotations $SO(3)$ et le groupe des spineurs $SU(2)$ est bien connue. Le centre C de $SU(2)$ est le sous-groupe Z_2 formé des matrices $I, -I$. Soit ϕ l'application

$$SU(2) \rightarrow SO(3), \phi(e^{-i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \theta / 2}) = (\mathbf{n}, \theta). \quad (16)$$

C'est un homomorphisme de groupe, c'est-à-dire

$$\phi(U_1)\phi(U_2) = \phi(U_1U_2) \quad (16')$$

dont le noyau est $Z_2 = \{I, -I\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $SU(2)$ correspondant à la rotation identité). On peut encore préciser que toute rotation (\mathbf{n}, θ) $0 < \theta < \pi$ est l'image par ϕ de deux matrices $u(\mathbf{n}, \theta)$ et $u(-\mathbf{n}, 2\pi - \theta) = -u(\mathbf{n}, \theta)$. Les points représentatifs sont sur un même diamètre de la boule B_3 (de diamètre 4π) à la distance 2π l'un de l'autre. Tout cela peut-être résumé par

$$SO(3) \approx SU(2)/Z_2 \quad (16'')$$

où \approx signifie l'isomorphisme de groupe et le quotient $SU(2)/Z_2$ signifie

que les matrices de $SU(2)$ sont considérées modulo les matrices $I, -I$ de Z_2 , c'est-à-dire au signe près.

Nous pouvons être maintenant rigoureux pour calculer $\pi_1(SO(3))$. En effet si φ est un angle, à tout lacet de $SO(3)$ ($\mathbf{n}(\varphi), \theta(\varphi)$) basé sur la rotation identique ($\theta(0) = 0$), correspond un chemin dans $SU(2)$ qui doit aboutir à un point de $\phi^{-1}(I_R) = \{I, -I\}$ ($I_R =$ rotation identique $\in SO(3)$). Puisque $SU(2)$ est simplement connexe il n'y a donc que 2 types de chemins: les lacets de base I (centre C de la boule) qui peuvent être réduits au point C) et les chemins allant de C à un point $2\pi\mathbf{n}$ de la surface de la boule. Ils peuvent être déformés dans le rayon $\lambda\mathbf{n}$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et puisque les points de la surface sont identifiés, tous ces rayons sont équivalents. La loi du groupe sur ces classes de chemin est défini par $I, -I$.

Notons que du point de vue topologique $SU(2) \xrightarrow{\phi} SO(3)$ est une application continue surjective obtenue en identifiant des paires de points dans $SU(2)$. De façon plus générale si $X \xrightarrow{\phi} Y$ est une application surjective continue d'espaces topologiques obtenu en identifiant des n -uplets de points dans X on dit que X est un recouvrement fini de Y . Si de plus X est simplement connexe ($\pi_1(X) = 0$) alors X est appelé recouvrement universel de Y car il est unique (à une équivalence topologique près). On montre alors aisément que pour $n > 1$, $\pi_n(X) = \pi_n(Y)$. Appliqué à $SO(3)$ et à son recouvrement universel $SU(2)$, dont l'espace topologique est S_3 , on obtient de formules (7) et (7')

$$\pi_2(SO(3)) = \pi_2(SU(2)) = 0 \quad \pi_3(SO(3)) = \pi_3(SU(2)) = Z. \quad (17)$$

3. Quelques concepts fondamentaux au sujet des groupes

3.1. Sous-groupes invariants, groupes quotients

Tous les lecteurs savent ce qu'est un groupe. Nous rappelons ici quelques autres notions. Soit $H < G$ (lire H sous groupe de G). Si $\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$ (\forall se lit "pour tout" ou "pour chaque"), on dit que H est sous-groupe invariant de G et on note $H \triangleleft G$. Notons gH l'ensemble des éléments $\{gh, h \in H\}$. On appelle gH le translaté à gauche de H par g et plus simplement, en anglais, le g -coset de H . Nous aurions aussi pu considérer le translaté à droite Hg . Notons que pour un sous-groupe invariant $gH = Hg$. Cela permet de définir une loi de groupe sur l'ensemble $[G : H]$ des cosets. En effet

$$H \triangleleft G : (g_1H)(g_2H) = g_1Hg_2H = g_1g_2HH = (g_1g_2)H \quad (18)$$

et ce groupe est noté G/H , (le quotient de G par H). Notons que l'application surjective

$$G \xrightarrow{\phi} G/H, \quad \phi(g) = (gH) \in G/H \quad (19)$$

est un homomorphisme de groupe (d'après l'équation (18)) de noyau H .

Exemple 1. L'homomorphisme* $U(n) \xrightarrow{\det} U(1)$

$\det u = e^{i\varphi} \in U(1)$ (groupe des phases) a pour noyau $SU(n)$ (par définition) d'où

$$U(1) = U(n)/SU(n). \quad (20)$$

De même, en se restreignant aux matrices réelles:

$$Z_2 = O(n)/SO(n). \quad (21)$$

Dans le cas n impair (par exemple $n = 3$) on a même plus:

$$O(3) = SO(3) \times Z_2 \quad (22)$$

(nous avons déjà défini le produit direct).

Exemple 2.

Soit $E(3)$ le groupe Euclidien à 3 dimension. Le sous-groupe des translations $\approx R^3$ est sous-groupe invariant.

$$O(3) = E(3)/R^3. \quad (23)$$

Si a, b sont des translations, Q, R des transformations orthogonales (rotations $\in SO(3)$ ou rotations-retournement), la loi de groupe de $E(3)$ est

$$(a, Q)(b, R) = (a + Qb, QR). \quad (24)$$

On note

$$E(3) = R^3 \square O(3) \quad (24')$$

et on dit que $E(3)$ est le produit semi-direct de R^3 par $O(3)$. Le groupe engendré par les translations et les rotations est

$$E_0(3) = R^3 \square SO(3). \quad (25)$$

Son espace topologique est connexe. Il est le produit topologique $R^3 \times X$ où X est l'espace topologique de $SO(3)$. Puisque R^3 est contractible, nous

* \det est un homomorphisme d'un groupe de matrices puisque $\det a \cdot \det b = \det ab$.

avons

$$\pi_n(E_0(3)) = \pi_n(\text{SO}(3)). \quad (26)$$

Ces groupes sont donnés pour $n = 1, 2, 3$ par les équations (13) et (17). Terminons cette sous-section par un exercice un peu abstrait: on peut simplifier les fractions! Soit $K \triangleleft G$, $H \triangleleft G$ et $K < H$ (alors $K \triangleleft H$), on a le théorème d'isomorphie des groupes topologiques quotients

$$\frac{G}{H} \approx \frac{G/K}{H/K}. \quad (27)$$

Refaisons une courte excursion dans les groupes d'homotopie.

3.2. Le groupe d'homotopie π_0

L'espace topologique le plus trivial a un seul point s . Si on le veut, on peut le considérer comme S_0 la sphère à zéro dimension. Quelles sont les classes d'homotopie des fonctions $\mathcal{F}(S_0, X)$. Chaque fonction f est complètement donnée par le point $f(s) \in X$. Deux fonctions f_1 et f_2 sont homotopes si on peut ramener par déformation continue, le point $f_2(S)$ en coïncidence avec $f_1(S)$. Quand c'est possible on dit que ces deux points étaient dans la même composante connexe de X , et $\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes de X . En général, ce n'est pas un groupe; cependant c'en est un si X est l'espace d'un groupe topologique G . Soit G_0 la composante connexe contenant l'identité et soit g un élément fixe de G . Alors gG_0g^{-1} est connexe; il contient $I = gIg^{-1} \in G_0$ donc $gG_0g^{-1} = G_0$ c'est-à-dire $G_0 \triangleleft G$. Le quotient est:

$$\pi_0(G) = G/G_0 \quad (28)$$

3.3. Action de groupe, orbite, groupe d'isotropie

Cette fois-ci nous ne commencerons pas par des exemples. Un groupe G agit sur un ensemble M si on peut définir une fonction $G \times M \xrightarrow{\gamma} M$ où $\gamma(g, m)$ est l'élément de M transformé de m par g . Pour que ce soit une action de groupe, γ satisfait

$$\gamma(1, m) = m, \quad \gamma(g_1(g_2, m)) = \gamma(g_1g_2, m). \quad (29)$$

Souvent nous noterons simplement

$$\gamma(g, m) = g \cdot m. \quad (29')$$

L'ensemble des transformés de m est appelé l'orbite de m et sera noté

$G(m)$. L'ensemble des $g \in G$ tels que $g \cdot m = m$ forment un sous-groupe $G_m < G$ est appelé groupe d'isotropie de m . Notons que

$$G_{g \cdot m} = gG_m g^{-1}. \quad (30)$$

Les groupes d'isotropie d'une orbite sont tous les groupes conjugués à l'un d'eux: nous notons $[G_m]$ cette classe de conjugaison de sous-groupe G_m . Par l'action de G , M est donc décomposé en orbites disjointes. Intéressons-nous maintenant à l'action de G sur une orbite. Remarquons que si $m' = g \cdot m$ on peut remplacer g par n'importe quel élément du coset gG_m et ainsi à tout point de $G(m)$ correspond un coset et réciproquement. L'action de G sur l'orbite est ainsi identifiée à l'action, par translation à gauche, de G sur l'ensemble des cosets $[G : G_m]$ de G_m : c'est-à-dire le transformé par g du coset hG_m est ghG_m . Evidemment, quand G_m n'est pas sous-groupe invariant, il n'y a pas de structure de groupe sur $[G : G_m]$ provenant de celle de G .

En résumé les différents types d'orbites d'un groupe sont donnés par les classes de conjugaison de ses sous-groupes (note technique: dans le cas topologique, nous ne nous occuperons que des orbites à topologie séparée, les autres sont pathologiques pour nous; elles correspondent aux sous-groupes fermés de G).

3.4. Orbites du groupe des rotations $SO(3)$ et de son recouvrement $SU(2)$

Ces types d'orbites sont donnés par les classes de conjugaison des sous-groupes fermés. Ce sont

$$C_n, D_n, T, O, Y, C_\infty, D_\infty. \quad (31)$$

C_∞ est le groupe des rotations autour d'un axe et on obtient D_∞ en ajoutant les rotations de π autour des axes perpendiculaires. De même C_m est le groupe engendré par la rotation $(\mathbf{n}, 2\pi/m)$, un autre générateur de D_n étant (\mathbf{r}, π) avec $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$. Enfin T, O, Y sont les sous-groupes de $SO(3)$ laissant invariants les polyèdres réguliers, le tétraèdre pour T , le cube ou l'octaèdre pour O , le dodécaèdre ou l'icosaèdre pour Y . Nous pouvons encore dire que C_∞ est le groupe laissant invariant un vecteur et l'orbite correspondante est ($\sim =$ homéomorphique = équivalence topologique)

$$[SO(3) : C_\infty] \sim S_2. \quad (32)$$

En effet l'ensemble des positions d'un vecteur d'origine fixe forme bien une sphère S_2 . Le groupe D_∞ est le groupe d'isotropie d'un segment (nous

dirons un “directeur”) ou, plus généralement, d’un ellipsoïde de révolution de centre O . Le groupe D_2 est le groupe d’isotropie d’un ellipsoïde à 3 axes inégaux.

Nous pouvons procéder de la même façon pour les orbites de $SU(2)$. Nous notons

$$\tilde{C}_n, \tilde{D}_n, \tilde{T}, \tilde{O}, \tilde{Y}, \tilde{C}_\infty, \tilde{D}_\infty, \tag{33}$$

les sous-groupes fermés de $SU(2)$ qui contiennent le centre $Z_2 = \{I, -I\}$ et dont les images par ϕ , défini par l’équation (16), sont les groupes de l’équation (31). De façon équivalente on dit que les groupes de formule (33) sont la préimage de ceux de (31) et on note parfois, par exemple

$$\tilde{D}_n = \phi^{-1}(D_n). \tag{34}$$

Le centre $\{I, -I\}$ étant invariant par conjugaison, il est dans tous les sous-groupes d’une classe de conjugaison, définie par un groupe de formule (33); et donc dans tous les groupes d’isotropie d’une orbite: donc il agit trivialement. Ainsi, pour les groupes d’isotropie de l’équation (33), $SU(2)$ n’agit pas effectivement mais seulement par son quotient $SO(3)$. Nous aurions pu atteindre ce résultat directement: si $\gamma(g, m)$ définit une action de $SO(3)$ sur une orbite

$$\tilde{g} \in SU(2), g \in SO(3) \tilde{\gamma}(\tilde{g}, m) = \gamma(\phi(\tilde{g}), m) \tag{35}$$

définit une action de $SU(2)$ sur la même orbite. Notons que \tilde{C}_n est isomorphe à C_{2n} et que pour $n = 2h + 1$ impair, les sous-groupes C_{2h+1} engendrés par $\exp(-2i\pi\tau \cdot \mathbf{n})(2h + 1)$ définissent de nouvelles orbites de $SU(2)$ qui ne correspondent pas à des orbites de $SO(3)$. Nous voyons donc dans ces cas particuliers

$$[SU(2) : \tilde{H}] = [SO(3) : H], \quad H = C_n, D_n, T, O, Y, C_\infty, D_\infty \tag{36}$$

que le théorème de simplification des fractions s’étend aux types d’orbites:

Théorème

$K \subset H \subset G, K \triangleleft G$, alors

$$[G : H] \sim [(G/K) : (H/K)]. \tag{37}$$

Nous utilisons ce théorème par le corollaire suivant:

Corollaire.

Soit \tilde{G} le recouvrement universel de G et $\tilde{G} \xrightarrow{\phi} G = G/\ker \phi$ l’homomorphisme correspondant; alors

$$[G : H] \sim [\tilde{G} : \phi^{-1}(H)]. \tag{38}$$

3.5. Homotopie des orbites de $SO(3)$

Nous avons vu que $[SO(3) : C_\infty] \sim S_2$ et nous en connaissons les groupes d'homotopie. Pour l'orbite $[SO(3) : D_\infty]$ d'un directeur, on n'a pas à distinguer les deux sens d'un vecteur pour passer au "directeur". L'orbite est obtenue en identifiant les points diamétralement opposés de S_2 ; par définition c'est $P(R, 2)$ l'espace projectif (réel) à 2 dimensions. Puisque S_2 est simplement connexe, c'est le recouvrement universel de $P(R, 2)$. Nous avons donc, en appliquant la même méthode qu'en 2.7:

$$\begin{aligned} \pi_1([SO(3) : D_\infty]) &= Z_2; \pi_2([SO(3) : D_\infty]) = Z \\ &= \pi_2([SO(3) : C_\infty]) = \pi_2(S_2). \end{aligned} \quad (39)$$

Enfin pour les sous-groupes finis F nous pouvons appliquer l'équation (38)

$$[SO(3) : F] \sim [SU(2) : \phi^{-1}(F)]. \quad (39')$$

Donc $SU(2)$ est le recouvrement universel de ces orbites; leur π_2 et π_3 sont ceux de $SU(2)$

$$\pi_2([SO(3) : F]) = 0, \quad \pi_3([SO(3) : F]) = Z, \quad (40)$$

$$\pi_1([SO(3) : F]) = \phi^{-1}(F). \quad (40')$$

Par exemple si $F = D_2$, est engendré par les rotations de π autour de chacun des axes de coordonnées

$$D_2 = \{1, (\mathbf{n}_x, \pi), (\mathbf{n}_y, \pi), (\mathbf{n}_z, \pi)\} \quad (41)$$

alors le groupe

$$\phi^{-1}(D_2) = \{\pm 1, \pm i\tau_x, \pm i\tau_y, \pm i\tau_z\} = Q \quad (41')$$

est appelé le groupe quaternionique et il est souvent noté Q .

Remarquons que les expressions de π_1 dans l'équations (39) et (40') pourraient s'écrire formellement:

$$\pi_1([SO(3) : H]) = \pi_1([SU(2) : \phi^{-1}(H)]) = \pi_0(\phi^{-1}(H)). \quad (42)$$

En fait il s'agit d'une relation tout-à-fait générale; ce que nous avons fait pour $SO(3)$ et son recouvrement $SU(2)$ s'étend à tout groupe de Lie G et son recouvrement; et de l'équation (38) on prouverait:

$$\pi_1([G : H]) = \pi_1[\tilde{G} : \phi^{-1}(H)] = \pi_0(\phi^{-1}(H)). \quad (43)$$

C'est aussi un théorème très général, prouvé par Cartan [22] que pour tout groupe de Lie réel G

$$\pi_2(G) = 0. \quad (44)$$

4. Etude topologique des défauts

4.1. L'orbite des états

Les milieux ordonnés que nous allons voir peuvent être très variés: fluides, superfluides, cristaux, cristaux liquides, champs de jauge; ils peuvent être en mouvement ou en repos. Nous admettons simplement qu'on puisse décrire leur état localement presque partout, c'est-à-dire excepté, *par définition*, aux défauts. Pour tous les cas qui nous intéressent (et je n'en vois pas d'autres actuellement) nous admettrons qu'on peut passer d'un état local à un autre état local par un groupe de transformations G . L'ensemble des états locaux est donc une orbite de groupe $[G : H]$. Un milieu ordonné qui occupe un volume \mathcal{V} est parfait si les états locaux peuvent être définis partout dans \mathcal{V} et s'ils sont tous identiques. Alors l'état parfait a la symétrie H et il peut être décrit par le point de l'orbite $[G : H]$: le coset qui est H lui-même. Pour tous les autres états on pourra définir une fonction sur $\mathcal{V} - \Sigma$ (où Σ est l'ensemble des défauts) et à valeur dans l'orbite $[G : H]$:

$$\mathcal{V} - \Sigma \xrightarrow{f} [G : H]. \quad (45)$$

Si la fonction f peut-être déformée continûment en une fonction constante (techniquement: si f est homotope à la fonction constante) nous pourrons alors l'étendre aussi sur Σ et nous dirons que le milieu est presque parfait et que ses défauts sont topologiquement instables. Il peut arriver qu'il n'y ait pas de défauts et que la fonction f ne soit pas homotope à une constante: on appelle ce cas une *configuration* topologiquement stable (c'est une espèce de noeud, comme nous le verrons plus loin).

4.2. La classification homotopique des défauts

Cette classification sera donnée par l'étude de la fonction f au voisinage du défaut. On essaiera d'abord de contracter ce dernier au maximum. S'il peut-être réduit dans une boule b_3 (qui est contractible à un point) la fonction f est connue dans un voisinage $B_3 - b_3 \sim S_2 \times \Lambda$ (où Λ est un intervalle). Elle définit donc, une classe d'homotopie de $\pi_2([G : H])$; c'est seulement dans le cas où cette classe est zéro que la fonction est homotope à une constante et peut-être continuée par dessus le défaut qui disparaît donc par simple déformation continue du milieu. Les autres

éléments de $\pi_2([G : H])$ correspondent à des défauts ponctuels topologiquement stables. De même, considérons une ligne dont les extrémités s'appuient sur la surface (frontière $\partial \mathcal{V}$ de \mathcal{V}) ou sur d'autres lignes ou surfaces de défauts. La fonction f au voisinage est comme dans le cylindre $S_1 \times \Lambda$ et elle définit une classe d'homotopie $\pi_1([G : H])$, qui classe topologiquement le défaut. Enfin une surface de défaut est classée par le $\pi_0([G : H])$. En résumé

$$\left. \begin{array}{l} \text{Les } \pi_n([G : H]) \text{ classent topologiquement les défauts; pour} \\ n = 2 \text{ les points; pour } n = 1 \text{ les lignes; pour } n = 0 \text{ les} \\ \text{parois; pour les milieux à 3 dimensions.} \end{array} \right\} \quad (46)$$

La relation générale est

$$\left. \begin{array}{l} \pi_n([G : H]) \text{ classe les défauts à } d \text{ dimensions pour les} \\ \text{milieux à } \nu = n + d + 1 \text{ dimensions.} \end{array} \right\} \quad (46')$$

En effet cette approche topologique très générale s'applique bien au-delà des défauts des milieux physiques ordonnés: par exemple, aux empreintes digitales ($\nu = 2$), ou à des champs de vecteurs: ν arbitraire. Commençons par ce dernier exemple.

4.3. Application aux champs (continus) de vecteurs

Considérons un champs de vecteurs à ν dimensions. Le groupe $GL(\nu, R)$ transforme tout vecteur v non nul en un autre vecteur v' non nul. L'orbite correspondante* est donc $X = R^\nu - \{0\}$. Ce qui joue le rôle des défauts sont donc les zéros du champ de vecteur. (Voir par exemple réf. [14] pour une application physique: il s'agit alors d'un champ magnétique \mathbf{B} soumis à des équations dynamiques préservant les zéros de \mathbf{B} : la stabilité topologique reflète une stabilité dynamique.) Considérons d'abord un zéro isolé: $v(x) = 0$; c'est-à-dire sur une petite sphère $S_{\nu-1}$ englobant x ; $y \in S_{\nu-1}$, $v(y) \neq 0$. La fonction $S_{\nu-1} \ni y \mapsto v(y) \in R^\nu -$

*Elle peut se calculer bien sûr en termes de groupes: $GL(\nu, R)$ à ν^2 paramètre. Prenons v comme 1^{er} vecteur de coordonnées: $v_1 = 1$, $v_i = 0$ ($i > 1$); les matrices qui le laissent invariant sont caractérisées par $g_{ki} = \delta_{ki}$; elles forment un groupe isomorphe à Affine ($\nu - 1, R$) le groupe linéaire inhomogène à $\nu - 1$ dimension, qui a $\nu(\nu - 1)$ paramètres. Or $GL(\nu, R) \sim SO(\nu) \times R^{\nu(\nu+1)/2}$, $Af(\nu, R) \sim SO(\nu - 1) \times R^{(\nu+2)(\nu-1)/2}$ d'où $[GL(\nu, R) : Af(\nu^{-1}R)] \sim [SO(\nu) \times R : SO(\nu - 1)] \sim S_{\nu-1} \times R$. (En d'autres termes il aurait suffi de faire agir le groupe $SO(\nu)$ et les dilatations, le groupe d'isotropie étant $SO(\nu - 1)$.)

$\{0\}$ définit une classe d'homotopie

$$i_x \in \pi_{\nu-1}(R^\nu - \{0\}) = \pi_{\nu-1}(S_{\nu-1}) \approx Z. \quad (47)$$

L'entier correspondant i_x est appelé l'indice de Hopf de zéro. Il y a même une loi globale de conservation quand la variété qui porte le champ de vecteurs est compacte: (voir la preuve dans le petit livre [21]).

Théorème de Hopf.

Si le champ de vecteurs sur M_n n'a que des zéros isolés la somme de leur indice de Hopf est $\chi(M_n)$ la caractéristique d'Euler Poincaré de M_n .

Ce théorème avait été prouvé par Poincaré pour $n = 2$. Appliqué à la terre, nous en déduisons que si n_s, n_i, n_c sont respectivement les nombres de sommets de montagnes, de lacs ou mers, de cols alors*.

$$n_s - n_c + n_i = 2 \quad (48)$$

On peut aussi étendre le théorème à une variété compacte à bord (cf. réf. [21]), ce qui est le cas du volume V contenant le milieu ordonné que nous étudions.

4.4. Les défauts des nématiques

Ils sont décrits par un champ de directeurs au lieu d'un champ de vecteurs. Pour un directeur (= segment de droite = ellipsoïde de révolution) on peut encore définir l'indice de Hopf, mais comme un directeur revient dans la même position après un demi-tour seulement, l'indice prend des valeurs demi-entières. Du point de vue groupe de symétrie, un nématique est invariant par translation, comme un liquide; le groupe d'invariance d'un directeur est D_∞ . L'orbite des états locaux est donc, en utilisant la simplification des fractions (37):

$$[E_0 : R^3 \square D_\infty] = [\text{SO}(3) : D_\infty] = P(2, R).$$

Nous avons déjà identifié cette orbite (plan projectif réel) et calculé son homotopie dans l'équation (39). Le π_2 est Z et correspond aux défauts ponctuels (indexé par le $\frac{1}{2}$ entier de l'indice de Hopf). Le π_1 est Z_2 : il y a des lignes de défauts qui s'annihilent par paires. Enfin, en utilisant par exemple la longue suite exacte d'homotopie (cf. réf. [8]) on peut montrer

*Il existe des preuves intuitives de ce beau résultat: par exemple noyez complètement la terre puis asséchez-la lentement.

que le π_3 de l'orbite $= \pi_3(\text{SO}(2)) = \pi_3(\text{S}_3) = \mathbb{Z}$. Ce groupe étiquette les configurations stables des nématiques. Ces prévisions correspondent bien à l'expérience; les lignes de défauts se voient aisément et s'annihilent par paires. En fait, on voit aussi des lignes plus épaisses correspondant (à un indice double) mais qui sont métastables (voir, par exemple la photographie donnée par Kléman, fig. 7a de la réf. [17]).

5. Perspectives et conclusion

Faute de temps, nous ne pouvons pas passer en revue tous les exemples d'applications de la classification topologique des défauts de symétrie des milieux ordonnés, des phases mésomorphes aux phases superfluides, des empreintes digitales aux champs de jauge. Le but de ces leçons était simplement de familiariser les auditeurs avec l'homotopie et de leur apprendre effectivement à calculer les groupes π_n . (Ce qui est souvent le point faible d'autres leçons.) Le lecteur est donc invité à s'exercer lui-même à faire des prédictions qu'il comparera avec la littérature originale ou les articles de revue cités. Il possède maintenant un outil puissant et efficace. Comparons par exemple le bel article de Friedel et Kléman [23] sur la classification des défauts des cholestériques (il n'y a que des lignes) avec la simple remarque: le quotient du groupe de symétrie par son sous-groupe connexe (qui est topologiquement contractible: translation R^2 et groupe hélicoïdal continu dans la direction perpendiculaire) est D_2 et nous avons vu que le π_1 de l'orbite $[\text{SO}(3) : D_2]$ est le groupe quaternionique Q [équation (41')]; le π_2 étant nul. Q est non abélien et a quatre classes de conjugaison non triviales. Les éléments correspondant à $\pm i\tau_j$ et $\pm i\tau_k$, $k \neq j$ ne commutent pas.

5.1. Succès de la classification homotopique

Cette classification permet de comprendre immédiatement ce qui fut péniblement trouvé au cours des années soixante-dix. Par exemple, lorsque des lignes de défauts a , b correspondent à des éléments \tilde{a} , \tilde{b} de π_1 ne commutant pas, les lignes ne peuvent se croiser [24] (ce qui a été développé systématiquement par Poenaru et Toulouse [25]). De plus en faisant faire à la ligne a un tour complet autour de la ligne b , l'élément \tilde{b} est transformé en $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{a}^{-1}$; le conjugué de \tilde{b} par \tilde{a} . De façon similaire, on peut observer ainsi l'action de π_2 sur π_1 dans un nématique: créer une paire de défauts ponctuels leur indice étant $\pm n$ (le plus facile étant $n = 1$) donc de signes opposés. Faire tourner une ligne de défaut autour

de l'un d'eux en la faisant passer entre les deux points: les deux défauts ponctuels sont maintenant du même signe et ils ne peuvent plus s'annihiler. Cela avait été prédit par Frank [26]. Cependant, il a bel et bien fallu le secours de l'outil homotopique pour comprendre certaines magnifiques observations de Bouligand dans les cholestériques [27]: il s'agit de combinaisons de lignes de défauts et de configurations.

5.2. Puissance de la classification homotopique

Même si cette classification topologique de la stabilité des défauts n'a encore permis que peu de prédictions vraiment nouvelles, elle nous donne un puissant outil qui permet maintenant de se poser de nouvelles et très nombreuses questions et d'y répondre très rapidement. Un champ extérieur modifie la symétrie du milieu, et par conséquent l'orbite des états locaux. Il est facile de voir comment est modifiée l'homotopie de la variété des états et d'étudier les changements dans la classification topologique des défauts. De même que deviennent les défauts d'un milieu ordonné au cours d'un changement de phase? Kléman et moi, y avons répondu dans réf. [6]. C'est la longue suite exacte d'homotopie (voir par exemple [19, 20] et la fig. 6 de la réf. [17]) qui donne la solution. Il existe aussi une théorie de l'homotopie relative [19], qui permet de relier les défauts de l'intérieur du volume à ceux de la surface (bojums, etc.). Maintenant que les physiciens possèdent explicitement cet outil, ils pourront s'en servir de plus en plus dans les domaines les plus variés de la physique (ce qui favorise l'interdisciplinarité).

5.3. Limitation de la classification homotopique

Il y a plusieurs types de limitations. Les considérations homotopiques ne font pas, à priori, intervenir d'échelle de longueur. Or, celle-ci est essentielle. Par exemple, à une échelle plus petite que le pas de l'hélice, un cholestérique n'est qu'un nématique un peu déformé. En fait la taille des défauts est donnée par la dynamique: les défauts "ponctuels" des smectiques A prédits par l'homotopie sont-ils les ellipses des coniques homofocales si facilement observées? (Kléman). Si les dimensions du milieu sont de l'ordre de la longueur caractéristique de la constitution des défauts, le classement homotopique sera différent e.g. Volovik et Mineev [4, 5] étudiant He^3 superfluide dans un capillaire.

Les seules considérations topologiques ne peuvent suffire en général (excepté pour les empreintes digitales!): les défauts coûtent en énergie;

beaucoup moins dans les structures très mobiles (nématiques) et plus pour les structures très stables: smectiques et, surtout, cristaux. Dans ces derniers, les lignes de dislocations, défauts de la symétrie de translation, sont facilement observées. Nous avons vu en 2.5 qu'un élément du π_1 correspond à un vecteur de réseau: il est connu dans la littérature comme vecteur de Burgers. Par contre, les défauts de symétrie de rotations, les "disgyrations", bien que traitées dans tous les manuels, sont très difficiles à observer. Pour tenir compte de ces considérations énergétiques, on peut ajouter des conditions de différentiabilité à la fonction ϕ à valeur dans $[G: H]$ caractérisant l'état. Pour les cristaux et les smectiques cela rend impossible les configurations non triviales. Pour les smectiques, on est ramené à étudier la topologie d'un feuilletage (les couches du smectique formant les feuilles). Des travaux de Poenaru et d'autres auteurs sont en cours sur ce sujet. On doit obtenir une classification plus fine des défauts et montrer que beaucoup de classes homotopiques deviennent impossible à réaliser.

Rappelons que, de toute façon, l'homotopie est une théorie topologique assez grossière. C'est la première à appliquer, mais d'autres invariants plus raffinés (d'homologie et de cohomologie par exemple) doivent intervenir aussi dans la physique.

Nous pouvons donc dire en conclusion que ces dernières années les physiciens ont bien mieux pris conscience de l'importance des considérations topologiques. La classification des défauts des milieux ordonnés en a été une excellente illustration. Les théories de jauge ont acquis en vingt ans une place prépondérante en physique et elle requièrent aussi ces considérations topologiques. Tout physicien cultivé devra savoir utiliser les espaces fibrés et étudier leur topologie: ce n'est pas difficile quand on est fortement motivé par la physique. Or, les applications seront nombreuses dans tous les domaines de la physique.

Références

- [1] D. Rogula, Large deformation of crystals, homotopy and defects, in: Trends in Application of Pure Mathematics to Mechanics, éd. G. Fichera (Pitman, New York, 1976).
- [2] G. Toulouse and M. Kléman, J. Phys. Lett. Paris 37 (1976) L 149.
- [3] M. Kléman, L. Michel and G. Toulouse, J. Phys. Lett. Paris 38 (1977) L 195.
- [4] G. E. Volovik and V. P. Mineev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. Pisma 24 (1976) 605 or JETP Lett. 24 (1976) 561.
- [5] G. E. Volovik and V. P. Mineev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 72 (1977) 2256 or JETP 45 (1977) 1186.

- [6] M. Kléman and K. Michel, *J. Phys. Lett. Paris* 39 (1977) L 29.
- [7] M. Kléman and L. Michel, *Phys. Rev. Lett.* 40 (1978) 387.
- [8] L. Michel, Group theoretical methods in physics, in: *Lecture Notes in Physics*, vol. 79 (Springer, 1978) p. 447.
- [9] M. Kléman, *Points, Lignes, Parois*, 2 vol. (Editions de Physique, Orsay, 1977).
- [10] V. P. Mineev, Landau Institute preprint, to appear in *Uspekhi*.
- [11] V. Poenaru, in: *Ill-condensed matter, Les Houches Session XXXI*, eds. R. Balian, R. Maynard and G. Toulouse, (North-Holland, Amsterdam 1979). p. 266.
- [12] D. Mermin, *Rev. Modern Phys.* 51 (1979) 591.
- [13] D. Finkelstein, *J. Math. Phys.* 7 (1966) 1218.
- [14] D. Finkelstein and D. Weil, *Int. J. Theor. Phys.* 17 (1978) 201.
- [15] Yu. S. Tyupkin, V. A. Fateev and A. S. Shvarts *Zh. Eksp. Teor. Fiz., Pisma* 21 (1975) 91 or *JETP Lett.* 21 (1975) 42.
- [16] M. J. Monastyrskii and A. M. Perelomov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz Pisma* 21 (1975) 94 or *JETP Lett.* 21 (1975) 43.
- [17] L. Michel, *Rev. Mod. Phys.* 52 (1980) 617.
- [18] G. H. Thomas, *Rivista N. Cim* 3 (1980) no 4.
- [19] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, (Princeton Univ. Press, 1951).
- [20] P. S. Hilton, *An introduction to homotopy theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1961).
- [21] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable point of view* (Univ. Virginia, Charlottesville 1965).
- [22] E. Cartan, *La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie*, *Act. Sci.* no 358 (Hermann, Paris, 1936).
- [23] J. Friedel and M. Kléman, dans "Fundamental Aspects of Dislocation Theory," eds. J. A. Simmons, R. de Witt and R. Bulloch, *Natl. Bur. Stand. (U.S.) Spec. Publ.* 317 (1970) vol. 1, p. 607.
- [24] R. de Wit., *J. Appl. Phys.* 42 (1971) 3304.
- [25] V. Poenaru and G. Toulouse, *J. Phys. Paris* 9 (1977) 887; *J. Math. Phys.* 20 (1979) 13.
- [26] cf. ref [23].
- [27] Y. Bouligand, B. Derrida, V. Poenaru, Y. Pomeau and G. Toulouse, *J. Phys. Paris* 39 (1978) 363.