Louis d'lattice in B. Venkov J. Martinet L'enseignement mathématique Réseaux euclidiens ~~33~~ ~~37~~, ~~2000~~ mono N37, ... 2001.

Nouveaux invariants géométriques, à valeur entière, des réseaux euclidiens

Peter Engel, Louis Michel, Marjorie Senechal

§ 0. *Introduction.*

Nous désignons par invariants, les fonctions sur l'espace $\mathcal{L}_n$ des réseaux euclidiens de dimension n, indépendantes de leur position et de leur échelle: il s'agit donc des fonctions $f(q)$ de la forme quadratique $q(L)$ définie par une base du réseau, invariantes par l'action de $GL_n(Z)$ et du groupe des homothéties:

$$m \in GL_n(Z),\ \lambda > 0, \quad f(q) = f(mqm^\top) = f(\lambda q). \tag{0(1)}$$

Les invariants introduits ici sont à valeur entière positive. La première famille de six invariants est définie à partir des trois sous-ensembles de vecteurs du réseau: $S \subseteq F \subseteq C$. Nous rappellerons la définition et les propriétés de ces trois sous-ensembles dans § 1; en notant $\mathcal{D}(L)$ le pavage de l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$ par les cellules de Dirichlet-Voronoï , $\mathcal{D}(\ell, L)$ celle de $\ell \in L$, $\mathcal{D}(o, L)$ celle de l'origine, un *vecteur de couronne* $\vec{c} = \overrightarrow{oc} \neq 0$ est défini par $\mathcal{D}(o, L) \cap \mathcal{D}(c, L) \neq \emptyset$; l'ensemble de ces vecteurs est dénoté par C. L'ensemble F des *vecteurs de face* est le sous-ensemble de C pour lesquels $\mathcal{D}(o, L) \cap \mathcal{D}(c, L)$ est une face de dimension $n-1$. Les vecteurs de norme minimum de L sont des vecteurs de face; leur ensemble est noté S. Les six invariants $\sigma, \phi, \chi, \bar\sigma, \bar\phi, \bar\chi$ sont définis en § 2 et nous donnons quelques interprétations géométriques de ces invariants. Pour chaque réseau, leurs valeurs satisfont les relations:

$$\sigma \leq \phi \leq \chi, \quad \bar\sigma \leq \bar\phi \leq \bar\chi, \quad \bar\sigma \leq \sigma, \quad \bar\phi \leq \phi, \quad \bar\chi \leq \chi. \tag{0(2)}$$

Dans § 3 nous introduirons un invariant prenant la même valeur sur un réseau et sur son dual: $\rho(L) = \rho(L^*)$. En fait ρ peut être défini par le groupe de Bravais P_L du réseau, c'est-à-dire la classe de conjugation dans $GL_n(Z)$ du stabilisateur de $q(L)$ pour l'action définie en (1). Il est alors possible d'étendre ρ à une fonction ρ' définie sur l'ensemble $\{CA\}_n$ des *classes arithmétiques*, c'est-à-dire des classes de conjugaison des sous-groupes finis de $GL_n(Z)$. Il existe un ordre partiel naturel (par inclusion des sous-groupes finis modulo une conjugaison) sur $\{CA\}_n$ et ρ' est une fonction non décroissante. Jordan [JOR880] a montré que $\{CA\}_n$ est fini. Notons $\mathcal{F}_n$ ses éléments maximaux; ils sont des classes de Bravais de réseaux. Pour chaque dimension n nous notons par ρ_n la valeur maximale de ρ sur $\{CA\}_n$ ou, ce qui est equivalent, sur $\mathcal{L}_n$.

En § 4 nous calculons les valeurs de ces invariants pour des familles de réseaux: par exemple pour les réseaux invariants par un groupe de Weyl irréductible et pour le réseau de Leech. Nous obtenons $\rho_n = 1$ pour $n \leq 5$ et comme borne inférieure pour les autres dimensions: $\rho_n \geq [n/4]$.

§ 1. *Les sous-ensembles $S \subseteq F \subseteq C \subset L$.*

Nous étudions les réseaux dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_n$. En prenant un point o du réseau comme origine des coordonnées, il est équivalent de considérer un réseau de vecteurs dans l'espace vectoriel E_n muni d'un produit orthogonal, induit par la métrique euclienne de

$\mathcal{E}_n$, et noté $(\vec{x}, \vec{y})$; nous appelons norme d'un vecteur $N(\vec{x}) = (\vec{x}, \vec{x})$. Nous employons le même symbole L pour ces deux objets décrivant le même réseau. Dans E_n, le réseau L est un sous-groupe $L \sim Z^n$ du groupe abélien R^n de E_n. Réciproquement, on reconstruit le réseau euclidien à partir de $L \subset E_n$. Pour cela nous définissons pour chaque vecteur $\vec{x} \in E_n$ le point $x \in \mathcal{E}_n$ par la notation $x = o + \vec{x}$ définie par $\overrightarrow{ox} = \vec{x}$. Plus généralement le carrée de la distance entre les deux points $x, y \in \mathcal{E}_n$ est $N(\overrightarrow{xy}) = N(y - x)$
Définition: Pour le réseau L, la cellule de Voronoï $\mathcal{D}(v)$ au point v du réseau est l'ensemble des points x dont la distance à v est $\leq$ la distance à tout autre point ℓ du réseau:

$$v \in L \qquad \mathcal{D}(v) \ := \ \{x \in \mathcal{E}_n;\ \forall \ell \in L, N(x - v) \leq N(x - \ell)\}. \tag{1(1)}$$

Les cellules de Voronoï forment un pavage (face contre face) de l'espace $\mathcal{E}_n$; il est étudié dans [VOR08]. Pour la cellule à l'origine on peut reformuler cette définition par:

$$x \in \mathcal{D}(o) \Leftrightarrow \vec{x} \text{ est un des plus courts vecteurs dans } L + \vec{x} \subset R^n;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \text{ est unique plus court vecteur} \\ \vec{x} \text{ est un des plus courts vecteurs:} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} x \in \text{interieur de } \mathcal{D}(o) \\ x \in \partial\mathcal{D}(o) \end{array} \right\}, \tag{1(2)}$$

où $\partial\mathcal{D}(o)$ est la surface de $\mathcal{D}(o)$. Cette cellule est la fermeture d'un domaine fondamental de L. Nous en déduisons:

$$\mathrm{vol}(\mathcal{D}(o)) = \mathrm{vol}(L). \tag{1(3)}$$

Une autre définition équivalente est:

$$\mathcal{D}(o) = \{x \in R^n;\ \forall \vec{\ell} \in L,\ (\vec{x}, \vec{\ell}) \leq \frac{1}{2} N(\vec{\ell})\}. \tag{1(4)}$$

Puisque elle est l'intersection de demi-espaces contenant o, $\mathcal{D}(o)$ est convexe.

Nous avons défini dans l'introduction le groupe de Bravais P_L du réseau L. Il est aussi le groupe de symétrie de la cellule de $\mathcal{D}(o)$. puisque la définition de celle-ci respecte la symétrie P_L. Puisque $-I \in GL_n(Z)$, la symétrie à travers o, est une symétrie de tout réseau, les cellules de Voronoï des réseaux ont un centre de symétrie.

Dans l'introduction, nous avons donné la définition de l'ensemble $C \subset L$ des vecteurs de couronne; il est aisé de montrer les équivalences:

$$C = \{\vec{c} \in L,\ \mathcal{D}(o) \cap \mathcal{D}(c) \neq \emptyset\} \Leftrightarrow C = L \cap \partial 2\mathcal{D}_o, \Leftrightarrow \vec{c} \text{ un des plus courts vecteurs de } 2L + \vec{c}. \tag{1(5)}$$

Ce qui est equivalent à:

$$\vec{c} \in C, \forall \vec{\ell} \in L, \quad N(\vec{c} + 2\vec{\ell}) - N(\vec{c}) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ (\vec{c}, \vec{\ell}) + N(\vec{\ell}) \geq 0. \tag{1(6)}$$

En remplaçant 2 by $m > 2$ dans l'equation précédente, on obtient:

$$\vec{c} \in C, \forall \vec{\ell} \in L, \quad m^{-1}(N(\vec{c} + m\vec{\ell}) - N(\vec{c})) = (2(\vec{c}.\vec{\ell}) + N(\vec{\ell})) + (m - 2)N(\vec{\ell}) > 0; \tag{1(7)}$$

cela signifie

Proposition 1. *Pour tous les entiers $m > 2$, un vecteur de couronne $\vec{c}$ est le plus court vecteur du translaté $\vec{c} + mL$ dans L,*

Notons que C est une union d'orbites de P_L et $c \in C \Rightarrow -c \in C$. Avec la proposition 1 nous concluons pour le nombre des éléments de C, que $|C|$ est pair et[1] $|C| \leq 3^n - 1$.

Notons enfin que $\frac{1}{2}c$ est un centre de symétrie de L; ce qui implique:

$$\frac{1}{2}c \text{ est centre de symétrie de } \mathcal{D}(o) \cap \mathcal{D}(c). \tag{1(8)}$$

Comme nous l'avons écrit dans l'introduction, la définition de l'ensemble F des vecteurs de face est:

$$F := \{\vec{f} \in C;\ \dim(\mathcal{D}(o) \cap \mathcal{D}(f)) = n - 1\}. \tag{1(9)}$$

L'équation de l'hyperplan plan portant la face définie par $\vec{f}$ est:

$$(\vec{f}, \vec{x}) = \frac{1}{2}N(\vec{f}) \quad \Rightarrow\ \mathcal{D}(o) = \{x, \bigcap_{f \in F} ((\vec{f}, \vec{x}) \leq \frac{1}{2}N(\vec{f}))\}; \tag{1(10)}$$

la seconde partie est un raffinement de (4). Puisque, par definition des vecteurs de couronne, leur milieu est sur $\partial\mathcal{D}(o)$ nous obtenons comme caractérisation de C:

$$C = \{\vec{c} \in L;\ \forall \vec{f} \in F,\ (\vec{f}, \vec{c}) \leq N(\vec{f})\},\ \exists \overrightarrow{f'} \in F,\ (\overrightarrow{f'}, \vec{c}) = N(\overrightarrow{f'}); \tag{1(11)}$$

l'égalité est obtenue parce que $(1/2)c$ doit être dans une face (et même à l'intersection de plusieurs si $\vec{c} \notin F$). Nous notons $|F|$ le nombre de faces de $\mathcal{D}(o)$; il est fini (car $F \subseteq C$) et de (3) on déduit que la cellule de Voronoï est un polyèdre. Comme elle a un centre de symétrie son nombre de faces est $\geq 2n$. Nous allons donner une borne supérieure à $|F|$.

Proposition 2. *$\vec{f}$ est un vecteur de face $\Leftrightarrow \pm\vec{f}$ sont plus courts que tout autre vecteur du tranlaté $\pm\vec{f} + 2L \subset L$.*

Si $\vec{f}$ est un vecteur de face, $\frac{1}{2}f$ est le milieu de of; il appartient aux deux cellules $\mathcal{D}(o)$ et $\mathcal{D}(f)$ et à aucune autre. Si $\vec{o} \neq \ell \in L$, on obtient de (1) $\pm N(\frac{1}{2}\vec{f} - \vec{\ell}) > N(\frac{1}{2}\vec{f})$ ce qui prouve $\Rightarrow$.
Si $\pm f$ sont les vecteurs les plus courts de leur translaté $\pm\vec{f} + 2L \subset L$, $\frac{1}{2}f$ appartient à au moins une face de vector $\vec{f_0}$; si $\vec{f}$ n'est pas lui-même ce vecteur de face $\vec{f_0}$, le point défini par $\frac{1}{2}\overrightarrow{f'} = \vec{f_0} - \frac{1}{2}\vec{f}$ est le symétrique de $\frac{1}{2}f$ par rapport au centre de la face et different de $\pm\frac{1}{2}\vec{f}$. L'équation (10) appliquée à $\vec{f_0}$ et la relation $\overrightarrow{f'} = 2\vec{f_0} - \vec{f}$ montrent que les vecteurs $\vec{f}$ et $\overrightarrow{f'}$ ont même norme et diffèrent par un vecteur de $2L$, ce qui est absurde. La proposition 2 est due à [MIN897]; cette preuve est proche de celle dans [VOR08] II,§55.

[1] Cette inégalité a été trouvée par [MIN07] dans le cas de l'empilement d'un corps convexe sur un réseau; comme on le voit, la preuve devient immédiate pour les cellules de Voronoï .

Nous avons donc établi les relations

$$2n \leq |F| \leq 2(2^n - 1) \leq |C| \leq 3^n - 1. \tag{1(12)}$$

En appliquant (10) aux vecteurs de face $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ on obtient:

$$\forall \vec{f_1}, \vec{f_2} \in F, \quad (\vec{f_1}, \vec{f_2}) < \min\big(N(\vec{f_1}), N(\vec{f_2})\big). \tag{1(13)}$$

L'ensemble S des vecteurs les plus courts de L peut être défini ainsi:

$$S := \{\vec{0} \neq \vec{s} \in L;\ \forall \ell\ 0 \neq \vec{\ell} \in L,\ N(\vec{s}) \leq N(\vec{\ell})\}. \tag{1(14)}$$

Nous notons leur norme $s(L)$.

Proposition 3. *Tout vecteur de L de norme $\leq 2s(L)$ est un vecteur de couronne. Il est vecteur de face si, et seulement si, $N(\vec{\ell}) < 2s(L)$ ou bien $\vec{\ell}$ n'est pas la somme de deux vecteurs perpendiculaires de S.*

Soient $\vec{v}_1 \neq -\vec{v}_2 \in L$ de norme $\leq 2s(L)$ et qui sont dans le même translaté de $2L$:

$$N(\vec{v}_1), N(\vec{v}_2) \leq 2s(L); \quad 0 \neq \vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \in 2L. \tag{\#}$$

La seconde partie de la condition requiert l'inégalité

$$0 \leq N(\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2) - 4N(\vec{s}) = (N(\vec{v}_1) + N(\vec{v}_2) - 4N(\vec{s})) \pm 2(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Cela est compatible avec (#) si, et seulement si:

$$N(\vec{v}_1) = N(\vec{v}_2) = 2s(L) \ \text{ et } \ (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0. \tag{\&}$$

Cela montre que les vecteurs $\vec{\ell}$ non opposés, de norme $< 2s(L)$ ne peuvent pas être dans le même translaté de $2L$; ils sont donc, avec leur opposé, les plus courts dans leur tranlaté de $2L$ et, par conséquent, ils sont vecteurs de face. C'est en particulier le cas des vecteurs de S; cela complète le titre de la section. Sont aussi vecteurs de face les vecteurs de norme $2s(L)$, non opposés et non orthogonaux (puisque les secondes conditions de (#) et (&) sont équivalentes).

Les vecteurs qui satisfont (#) et (&) sont des vecteurs de couronne qui ne sont pas vecteurs de face puisque ils sont dans le même translaté de $2L$; de plus les vecteurs qu'ils définissent $\vec{s}_\pm = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 \pm \vec{v}_2)$ sont dans S et sont orthogonaux. Réciproquement, si deux vecteurs $\vec{s}_1, \vec{s}_2 \in S$ sont orthogonaux, les deux vecteurs $\vec{v}_\pm = \vec{s}_1 \pm \vec{s}_2$ satisfont (&). De plus il sont dans le même translaté de $2L$ puisque $\vec{v}_+ - \vec{v}_- = 2\vec{s}_1$. Il est possible qu'un vecteur $\vec{c}$ de norme $2s(L)$ soit la somme de plusieurs paires distinctes de vecteurs orthogonaux de S. Les vecteurs différence dans chaque paire sont des vecteurs de couronne du même translaté $\vec{c}+2L$ et l'ensemble de ces vecteurs forment une *croix*, c'est-à-dire un ensemble de vecteurs de même norme formé de paires de vecteurs opposés et ces paires sont mutuellement orthogonales. Une croix a au plus $2n$ vecteurs. Mais quand $N(\vec{c}) > 2s(L)$ on peut avoir un plus grand nombre de vecteurs de couronnes dans le même translaté de $2L$.

§ **2.** *Les invariants* $\sigma, \phi, \chi; \bar{\sigma}, \bar{\phi}, \bar{\chi}$.

Pour un réseau L, nous ne considérons que des bases $\tilde{b} = \{\vec{b}_j\}$, $1 \leq j \leq n$, de E_n formées de vecteurs de L et engendrant le réseau; ce sont des bases de E_n. Dans ces bases, les composantes des vecteurs du réseau sont des nombres entiers; par exemple les composantes dans $\tilde{b}$ des vecteurs de la base $\tilde{b}' = \{\vec{b}'_i\}$ sont $\vec{b}'_i = \sum_j m_{ij}\vec{b}_i$, la matrice m ayant un déterminant ± 1, c'est-à-dire $m \in GL_n(Z)$. Cela montre que l'ensemble $\mathcal{B}$ des bases d'un réseau est une orbite principale (stabilisateur $=1$) de $GL_n(Z)$. Dans l'action de ce groupe sur les coordonnées des vecteurs du réseaux les orbites de vecteurs sont définies par un entier positif: le plus grand commun diviseur d des coordonnées (qui est indépendant du choix de la base). Nous désignons par *visibles* les vecteurs dont les coordonnées sont premières entre elles, i.e. $d = 1$.

Chaque base definit un parallélipipède $\mathcal{P}_b$ dont les coordonnées des 2^n sommets sont ± 1. Ainsi $\frac{1}{2}\mathcal{P}_b$ est la fermeture d'un domain fondamental de L. Pour étudier les aspects géométriques d'un réseau reliés à la structure des ensembles $S \subseteq F \subseteq C$ nous introduisons pour chaque base les plus petits nombres positifs σ_b, ϕ_b, χ_b tels que:

$$S \subset \sigma_b \mathcal{P}_b, \ F \subset \phi_b \mathcal{P}_b, \ C \subset \chi_b \mathcal{P}_b. \qquad 2(1)$$

Les ensembles S, F, C et le polyèdre $\mathcal{P}_b$ étant invariant par $-I$, la symétrie par rapport à l'origine, ces trois nombres sont égaux à la valeur absolue de la plus grande et la plus petite des coordonnées des vecteurs de S, F, C respectivement. Ce sont donc des entiers satisfaisant à:

$$0 < \sigma_b, \phi_b, \chi_b \in Z, \qquad \sigma_b \leq \phi_b \leq \chi_b; \qquad 2(2)$$

les inégalités viennent des inclusions $S \subseteq F \subseteq C$.

Pour chaque base $\tilde{b} = \{\vec{b}_i\}$ de L on définit une base du réseau dual L^* par

$$\{\vec{b}^*_i\} := \tilde{b}^{-1}, \ i.e.(\vec{b}_i, \vec{b}^*_j) = \delta_{ij}; \qquad E_n \ni \vec{x} = \sum_i \xi_i \vec{b}_i \ \Leftrightarrow \ \xi_i = (\vec{b}^*_i, \vec{x}). \qquad 2(3ab)$$

L'équation (3b) rappelle qu'une coordonnée d'un vecteur est égale au produit scalaire avec le vecteur correspondant de la base duale; nous pouvons donc donner une définition équivalente pour les trois entiers de 2(1):

$$\sigma_b = \max_{1 \leq i \leq n, \vec{s} \in S} |(\vec{b}^*_i, \vec{s})|, \quad \phi_b = \max_{1 \leq i \leq n, \vec{f} \in F} |(\vec{b}^*_i, \vec{f})|, \quad \chi_b = \max_{1 \leq i \leq n, \vec{c} \in C} |(\vec{b}^*_i, \vec{c})|. \qquad 2(4)$$

En prenant pour chacun le minimum sur l'ensemble des bases:

$$\sigma(L) = \min_{b \in \mathcal{B}} \sigma_b \in Z, \ \phi(L) = \min_{b \in \mathcal{B}} \phi_b \in Z, \ \chi(L) = \min_{b \in \mathcal{B}} \chi_b \in Z, \qquad 2(5)$$

nous obtenons trois invariants du réseau; ils sont aussi invariants par les homothéties. Bien que les bases optimales puissent être différentes les inégalités (2) impliquent:

$$\sigma(L) \leq \phi(L) \leq \chi(L). \qquad 2(6)$$

Un cas banal correspond aux réseaux de symétrie appelée *orthorhombique* P en cristallographie: $|F| = 2n$ et les paires de vecteurs de face opposés sont orthogonales; $\frac{1}{2}\mathcal{P}_b$ est la cellule de Voronoï. Les pointes des vecteurs de C sont les centres des faces de dimension d, $0 \leq d \leq n-1$ de $\mathcal{P}$; le nombre de vecteurs de couronne est maximum: $|C| = 3^n - 1$. Pour ces réseaux $\sigma = \phi = \chi = 1$. Ces valeurs correspondent à bien d'autres réseaux; mais nous montrerons aussi que la valeur des invariants ϕ, χ peut être arbitrairement grande.

Nous définissons trois autres invariants en définissant le min.max sur les vecteurs du réseaux dual (au lieu de le prendre sur l'ensemble des bases):

$$\bar{\sigma} = \min_{\vec{\ell}^* \in L^*} \max_{\vec{s} \in S} |(\vec{\ell}^*, \vec{s})|, \quad \bar{\phi} = \min_{\vec{\ell}^* \in L^*} \max_{\vec{f} \in F} |(\vec{\ell}^*, \vec{f})|, \quad \bar{\chi} = \min_{\vec{\ell}^* \in L^*} \max_{\vec{c} \in C} |(\vec{\ell}^*, \vec{c})|. \qquad 2(7)$$

Ces invariants sont aussi invariants par homothétie et par définition du réseau dual, leur valeurs sont entières. Notons que $\vec{\ell}^*$ doit être un vecteur visible de L^* et qu'il n'est pas nécessairement le même pour les différents invariants. Les points du réseau sont alors répartis dans l'ensemble dénombrable des hyperplans parallèles d'équations

$$\mathcal{H}_m (\vec{\ell}^*, \vec{v}) = m \in Z. \qquad 2(8)$$

Nous remarquons qu'une translation $m'\vec{t} \in L$, $(\vec{\ell}^*, \vec{t}) = 1$ envoie les points d'un hyperplan $\mathcal{H}_m$ sur ceux de l'hyperplan $\mathcal{H}_{m+m'}$. Les invariants définis en (7) satisfont des inégalités similaires à celles de (2):

$$0 \leq \bar{\sigma}(L) \leq \bar{\phi}(L) \leq \bar{\chi}(L), \qquad 2(9)$$

excepté que $\bar{\sigma}$ peut être nul si les vecteurs de S n'engendrent pas, linéairement, l'espace E_n; les deux autres invariants doivent être > 0 puique les vecteurs de F (et par conséquent ceux de C) engendrent le réseau.

Puisque, en passant de (3) et (4) à (7), on prend pour chaque invariant un seul vecteur $\ell^* \in L^*$ au lieu d'une base, on a nécessairement les inégalités:

$$\bar{\sigma}(L) \leq \sigma(L), \quad \bar{\phi}(L) \leq \phi(L), \quad \bar{\chi}(L) \leq \chi(L). \qquad 2(10)$$

Notons que ces invariants donnent le nombre minimum d'hyperplans voisins, orthogonaux au vecteur $\vec{\ell}* \in L^*$, soit respectivement $2\bar{\sigma}+1$, $2\bar{\phi}+1$, $2\bar{\chi}+1$, qui contiennent toutes les pointes des vecteurs de S, F, C, c'est-à-dire respectivement, les centres des boules touchant celle de l'origine dans l'empilement de boules sur le réseau, les centres des cellules de Voronoï qui ont une $(n$-$1)$-face (pour F) ou seulement une intersection plus petite (et non vide pour C). Remarquons que le translaté par $2L$ d'un vecteur de l'hyperplan $\mathcal{H}_m$ (see(8)) a des élements dans tous les hyperplans $\mathcal{H}_{m'}$, $m' - m$ pair. Ce qui implique que lorsque $\bar{\phi}$ a sa valeur minimale 1, les vecteurs de faces sont répartis entre les hyperplans $\mathcal{H}_0$ and $\mathcal{H}_{\pm 1}$ (on obtient ceux de $\mathcal{H}_{-1}$ en multipliant par $-I$ ceux de $\mathcal{H}_1$).

Considérons l'union $\mathcal{M}_m$ de toutes les cellules de Voronoï centrées dans $\mathcal{H}_m$. Nous l'appellerons un mur; les murs des différents hyperplans sont obtenus l'un de l'autre par des translations. Puisque le pavage des cellules de Voronoï est face par face, il semblerait qu'un mur sépare son complément dans $\mathcal{E}_n$ en deux domaines connexes. Ce n'est vrai qu'en basse dimension. Si $\bar{\phi} = 2$, soit $\vec{f_2}$ un vecteur de face satisfaisant $(\vec{\ell}^*, \vec{f_2}) = 2$. Le cellules $\mathcal{D}(o)$ et $\mathcal{D}(f_2)$ ont une face commune centrée en $\frac{1}{2} f_2 \in \mathcal{H}_1$, ce qui prouve qu'en parcourant de o à f_2 le segment of_2 on travese le mur $\mathcal{M}_1$ sans rencontrer une de ses cellules. La généralisation aux valeurs de $\bar{\phi}$ plus grandes est immédiate; et la condition nécessaire obtenue est suffisante.

Proposition 4. *Pour partager l'espace $\mathcal{E}_n$ en deux domaines par une union de murs $\mathcal{M}_m$ voisins de cellules de Voronoï il est nécessaire et suffisant d'en prendre $\bar{\phi}$ voisins.*

Nous montrerons que $\bar{\phi} = 2$ pour les réseaux E_6^*, E_7^*, E_8, il est 4 pour le réseau de Leech Λ_{24}.

Corollary 4. *Si $\bar{\phi} < \bar{\chi}$, l'union des murs $\cup_{m=1}^{\bar{\phi}} \mathcal{M}_m$ a des points d'épaisseur zero.*

Ces points ceux des intersections $\mathcal{D}(o) \cap \mathcal{D}(c)$, $|(\vec{\ell}^*, \vec{c})| > \bar{\phi}$, qui sont des d-faces de $\mathcal{D}(o)$ de dimension $0 \leq d < n-1$.
Pour l'empilement des boules, la remarque suivant (10) conduit aisément à:

Proposition 5. *Dans l'empilement des boules sur L, les boules qui touchent la boule centrée en o sont centrées dans les hyperplans $\mathcal{H}_m$, $-\bar{\sigma} \leq m \leq \bar{\sigma}$.*

Un réseau peut n'avoir qu'une paire de vecteurs dans S. Mais nous sommes surtout intéressés par les réseaux ayant un groupe de Bravais maximal dans $GL_n(Z)$. Nous montrerons que $\bar{\sigma}(E_8) = 2$, $\bar{\phi}(E_8) = 2$, $\bar{\sigma}(\Lambda_{24}) = 3$, $\bar{\phi}(\Lambda_{24}) = 4$.

§**3.** *L'invariant $\rho(L) = \rho(L^*) = \rho'(P_L)$.*

Nous introduisons un autre invariant à valeurs entières positives. Il est directement lié à la symétrie d'un réseau; en fait il ne dépend que de sa classe de Bravais et il a la propriété d'être le même pour un réseau et son dual.

Nous définissons d'abord, pour toute paire de vecteurs $\vec{v}, \vec{\ell} \in L$, le concept de *produit scalaire d'orbites de P_L dans L*, que nous notons $|\vec{v}, \vec{\ell}|$ et qui est défini par:

$$|\vec{x}, \vec{y}| := \max_{g_1, g_2 \in P_L} |(g_1.\vec{x}, g_2.\vec{y})| = \max_{g \in P} |(\vec{x}, g.\vec{y})|, \qquad 3(1)$$

(pour obtenir la dernière égalité, utiliser $(g.\vec{x}, g.\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$). Dans le cas de deux vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, appartenant à la même orbite, $|\vec{x}, \vec{y}| = N(\vec{x}) = N(\vec{y})$. Une borne supérieure du produit scalaire d'orbites $|\vec{v}_1, \vec{v}_2|$ est donné par l'inégalité $g_1, g_2 \in P_l$, $N(g_1.\vec{v}_1 - g_2\vec{v}_2) \geq N(\vec{s})$ où $\vec{s} \in S$; une condition équivalente est:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in L,\ |\vec{v}_1, \vec{v}_2| \leq \frac{1}{2}(N(\vec{v}_1) + N(\vec{v}_2) - N(\vec{s})), \quad \vec{s} \in S. \qquad 3(2)$$

En utilisant la définition de (1) on peut remplacer le maximum des modules des produits scalaires par le produit scalaire des orbites dans les équations 2(4-5) et 2(7) définissant les invariants.

Les valeurs des normes des vecteurs d'un réseau forment un ensemble discret et dénombrable. Nous notons par L_a l'ensmble des vecteurs de L de norme a. Chacun de ces ensembles est fini. S est l'un d'eux; nous le dénotons par L_s. Un réseau est *pair* quand toutes les normes de ses vecteurs sont paires. Les tables 1a,b donnent les bornes supérieures de $|\vec{v}_1, \vec{v}_2|$ dans (2) pour les réseaux pairs avec $N(\vec{s}) = 2$ ou 4.

Pour toute base de L nous définissons l'entier positif r_b par

$$r_b(L) := \max_{1 \leq i,j \leq n} |\vec{b}_i^*, \vec{b}_j|. \qquad 3(3)$$

$$(a):\begin{pmatrix} |L_p,L_q| & L_2 & L_4 & L_6 & L'_8 & L_{10} \\ L_2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ L_4 & 2 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ L_6 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 \\ L'_8 & 3 & 5 & 6 & 8 & 8 \\ L_{10} & 4 & 6 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad (b):\begin{pmatrix} |L_p,L_q| & L_4 & L_6 & L_8 & L_{10} & L_{12} \\ L_4 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ L_6 & 3 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ L_8 & 4 & 5 & 8 & 7 & 8 \\ L_{10} & 5 & 6 & 7 & 10 & 9 \\ L_{12} & 6 & 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Table 1(ab). Tableau des bornes supérieures des produits scalaires d'orbites pour les réseaux pairs.

L_q est l'ensemble des vecteurs de norme $N(v) = q$. pour les valeurs montrées de q, les L_q ne contiennent que des vecteurs visibles sauf L_8 dans le cas (a); on peut donc décomposer celui-ci en une union disjointe: $L_8 = (2)L_2 \cup L'_8$, ce dernier sous-ensemble ne contennt que des vecteurs visibles.

Quand on prend le minimum de r_b sur l'ensemble des bases on obtient un invariant à valeurs entières:

$$\rho(L) = \min_{b\in\mathcal{B}} r_b(L) = \rho(L^*) \in Z. \tag{3(3')}$$

Cet invariant a en commun avec les invariants σ, ϕ, χ que sa valeur est obtenue dans une base optimale. Son interprétation est aisée. Dans la base $b \equiv \{\vec{b}_j\}$, la matrice représentant l'élément $g \in P_L$ du groupe de Bravais du réseau L est:

$$g \in P_L, \quad g_{ij} = (\vec{b}^*_i, g.\vec{b}_j). \tag{3(4)}$$

En comparant (1) et (3) on obtient:

$$r_b(L) = \max_{g\in P_L;\ 1\le i,j\le n} g_{ij} = \max_{g\in P_L;\ 1\le i,j\le n} |g_{ij}|; \tag{3(5)}$$

on passe de la première à la seconde égalité en notant que $-I \in P_L$. Nous avons vu au début de §2 que les bases d'un réseau forment une orbite de $GL_n(Z)$; un changement de base correspond à une conjugaison de P_L dans $GL_n(Z)$. En notant $[P_L]$ la classe de Bravais de L, c'est-à-dire la classe de conjugaison des groupes P'_L, nous obtenons une définition équivalente de $\rho(L)$:

$$\rho(L) = \min_{P'_L\in[P_L]} \max_{g\in P'_L;\ 1\le i,j\le n} |g_{ij}|. \tag{3(6)}$$

On peut étendre cette définition à tout sous-groupe fini G de $GL_n(Z)$. On obtient ainsi une fonction ρ' à valeur dans N_+ (l'ensemble des entiers positifs), définie sur l'ensemble $\{CA\}_n$ des *classes arithmétiques*, c'est-à-dire des classes de conjugaison des sous-groupes finis de $GL_n(Z)$. La fonction ρ est donc la restriction de ρ' au sous ensemble $\{CB\}_n \subset \{CA\}_n$ où $\{CB\}_n$ est l'ensemble des classes de Bravais des réseaux de dimension n. Dans le cas générique des réseaux dont le groupe de symétrie est $Z_2(-I_n)$, $\rho = 1$.

Il existe un ordre partiel naturel (par inclusion des sous-groupes finis modulo une conjugaison) sur $\{CA\}_n$ et ρ' est une fonction non décroissante. De même ρ est une function non décroisante sur $\{CB\}_n$ dont l'ordre partiel est induit par celui de $\{CA\}_n$. Jordan [JOR880] a montré que $\{CA\}_n$ est fini. Notons $\mathcal{F}_n$ ses éléments maximaux; ils sont des classes de Bravais de réseaux. En effet, si q_n est une matrice $n \times n$ symétrique, positive et $|G|$ est le nombre d'éléments de G, sous-groupe maximal de $GL_n(Z)$, la moyenne sur G de q:

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} g q g^\top \qquad 3(7)$$

est une forme quadratique positive pour un réseau ayant G comme groupe de Bravais. Parmi les groupes de Bravais maximaux $\mathcal{F}_n$ on trouve le groupe orthogonal $O_n(Z)$ (qui est le groupe de réflexions B_n en notation de Coxeter); tous ses éléments de matrices sont $\pm 1, 0$, donc $\rho'(B_n) = 1$. En posant $q = I_n$ dans (7) on obtient I_n pour la forme quadratique invariante; c'est ainsi qu'on dénote généralement le réseau cubique simple. Plus généralement $\rho(L) = 1$ lorsque la classe de Bravais $[P_L]$ contient un groupe orthogonal; les réseaux orthorhombiques P définis après 2(6) en sont un exemple particulier: leur P_L est le sous-groupe diagonal de $O_n(Z)$.

§ **4.** *Valeur des invariants pour des familles de réseaux.*

Les réseaux simples de racines et de poids.
Nous avons déjà prouvé que les réseaux self-duaux I_n ont leurs sept invariants égaux à un. Leurs racines sont leurs vecteurs de norme 1 et 2. Pour les autres réseaux de racines simples A_n, D_n, E_m, $m = 6, 7, 8$, la base de Cartan qui (intervient naturellement dans la théorie des algèbres de Lie simples) n'est pas optimale dans la minimisation de 2(5) et 3(3'). Seuls les réseaux A_2, D_4 ont deux orbites de racines (celles des systèmes G_2, F_4). Pour les autres $S = F = R$ l'orbite des racines; elle engendre le réseau. Ces réseaux sont entiers pairs; chacun est donc un sous-réseau du dual, le réseau des poids. Dans ce dernier, nous appellons w-vecteurs les vecteurs dont le produit scalaire d'orbite avec les racines est égale à 1.
Le réseau de racines A_n et son dual A_n^*, réseau de poids.
Nous notons par $\mathcal{N}_n$ et $\mathcal{N}_n^+$ l'ensemble des entiers m satisfaisant respectivement $0 \leq m \leq n$ et $1 \leq m \leq n$. On considère un espace vectoriel E_{n+1} avec une base orthonormée:

$$\alpha, \beta \in \mathcal{N}_n, \quad (\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \vec{e} = \frac{1}{n+1} \sum_\alpha \vec{e}_\alpha, \quad \text{so } (\vec{e}, \vec{e}) = (\vec{e}, \vec{e}_\alpha) = \frac{1}{n+1}. \qquad 4(1)$$

Comme nous le verrons, le groupe de Weyl $A_n \sim \mathcal{S}_{n+1}$ est le groupe des permutations des coordonnées. Il laisse invariant l'hyperplan $\mathcal{H}_e$ orthogonal à $\vec{e}$. Ce sous-espace contient les vecteurs:

$$(\vec{e})^\perp \equiv \mathcal{H}_e \ni \vec{u}_\alpha; \quad \vec{u}_\alpha = \vec{e}_\alpha - \vec{e}, \quad (\vec{e}, \vec{u}_\alpha) = 0, \quad (\vec{u}_\alpha, \vec{u}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n+1}, \quad \sum_\alpha \vec{u}_\alpha = 0. \quad 4(2)$$

Les réseaux $A_n \subset A_n^*$ sont dans $\mathcal{H}_e$. Pour $n > 2$ les racines[2] de A_n sont les $n(n+1)$ vecteurs:

$$R = \{\vec{r}_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha - \vec{e}_\beta = \vec{u}_\alpha - \vec{u}_\beta\}, \qquad N(\vec{r}_{\alpha\beta}) = 2, \quad |R| = n(n+1). \qquad 4(3)$$

[2] A_2 a une autre orbite de racines, de norme 6. Il est aussi le seul réseau ayant la propriété $S = F = C$.

Par définition R engendre le réseau A_n et il n'est pas difficile de vérifier

$$\text{pour } A_n,\ n > 2: \qquad R = S = F. \qquad 4(4)$$

On verifie que les réflexions $\sigma_{r_{\alpha\beta}}$ définies par les racines permutent les vecteurs $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta$ in E_{n+1}. Elles engendrent le groupe de Weyl A_n. Notons que R est une orbite du groupe $\bar{A}_n = A_n \times Z_2(-I)$; c'est le groupe d'automorphisme des réseaux A_n et A_n^* mais les représentations dans $GL_n(Z)$ correspondant aux groupes de Bravais P_{A_n} et $P_{A_n^*}$ ne sont pas conjuguées (elles sont seulement contragrédiantes avec la correspondance $g \leftrightarrow (g^\top)^{-1} = (g^{-1})^\top$).

Les produits scalaires:

$$(\vec{r}_{\alpha\beta}, \vec{u}_\gamma) = \delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\beta\gamma} \qquad 4(5)$$

montrent que les $2(n+1)$ vecteurs $\pm\vec{u}_\gamma$'s forment une orbite de w-vecteurs. Les n vecteurs $\vec{b}_i$:

$$i \in \mathcal{N}_n^+, \quad \vec{b}_i = \vec{r}_{i0} = \vec{u}_i - \vec{u}_0 = \vec{e}_i - \vec{e}_0, \ \Rightarrow\ \vec{b}_i^* = \vec{u}_i \qquad 4(6)$$

engendrent R (puisque $\vec{r}_{ij} = \vec{b}_i - \vec{b}_j$) donc ils forment une base du réseau A_n; on établit la base duale en utilisant (4), (6) et 2(3). Elle est dans une $\bar{A}_n$-orbite. D'après 3(3), $r_b = 1$ et donc $\rho = 1$. Cela implique pour l'orbite $R = F$, que toute racine est une combinaison lineare des $\vec{b}_i$ avec des coefficients $\pm 1, 0$, c'est-à-dire $\phi_b = 1$.

Considérons les $\bar{A}_n$-orbites C_m dans le réseau des racines:

$$\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subset \mathcal{N}_n,\ \mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \emptyset,\ |\mathcal{A}| = |\mathcal{A}'| = m, \quad C_m = \{\vec{c}_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} = (\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \vec{e}_\alpha) - (\sum_{\beta\in\mathcal{A}'} \vec{e}_\beta)\}, \quad C_1 = F. \qquad 4(7)$$

L'équation 1(11) montre que

$$C(A_n) = \cup_{m=1}^{[n/2]} C_m, \quad |C_m| = \kappa_1(m)\kappa_2(m),\ \kappa_1(m) = \binom{2m}{m},\ \kappa_2(m) = \binom{n+1}{2m}, \qquad 4(8)$$

$$\sum m = 1^{[n/2]} \kappa_1(m) = 2^n - 1; \qquad 4(8')$$

où $\kappa_1(m), \kappa_2(m)$ sont pour les vecteurs de couronne dans C_m, le nombre de vecteurs dans une classe $L/2L$ et le nombre de classes respectivement; 4(8') montre que nous avons toutes les classes. On vérifie que $\forall \vec{c} \in C_m$, $(\vec{c}, \vec{b}_i^*) = \pm 1$ ou 0; de 2(4), cela implique $\chi_b = 1$. Avec les inégalités 0(2) nous en déduisons:

$$\bar{\sigma}(A_n) = \bar{\phi}(A_n) = \bar{\chi}(A_n) = \sigma(A_n) = \phi(A_n) = \chi(A_n) = \rho(A_n) = 1. \qquad 4(9)$$

Pour définir l'ensemble W de tous les w-vecteurs de A_n^* nous utilisons à nouveau la notation $\mathcal{A}$ pour un sous-ensemble strict et non vide de N_n et $\bar{\mathcal{A}}$ pour son complément:

$$\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{N}_n, \quad W = \{\vec{w}_{\mathcal{A}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \vec{u}_\alpha\}, \quad \vec{w}_{\mathcal{A}} + \vec{w}_{\bar{\mathcal{A}}} = 0; \quad |W| = 2(2^n - 1). \qquad 4(10)$$

Les $\mathcal{A}$ de même cardinal $1 \leq |\mathcal{A}| = a \leq n$ definissent des w-vecteurs ayant même norme et formant une orbite de A_n:

$$|\mathcal{A}| = a \in \mathcal{N}_n^+,\ \vec{w}_a \in W_a \quad N(\vec{w}_a) = \frac{a(n+1-a)}{n+1}; \qquad 4(11)$$

$$W_a = A_n : (A_{a-1} \times A_{n-a}) = -W_{n+1-a},\ |W_a| = \binom{n+1}{a}. \qquad 4(11')$$

Quand $a \neq (n+1)/2$, les orbites correspondantes de $\bar{A}_n$ sont $W_a \cup W_{n+1-a}$. On vérifie directement que les vecteurs de chaque paire $\pm\vec{w}_a$ qont les plus courts dans leur translaté par $2L$; avec la dernière égalité de (10) on obtient:

$$\text{pour } A_n^* : \quad W = F = C. \qquad 4(12)$$

L'équation (10) montre que les vecteurs $\vec{w}$ sont soit des sommes de vecteurs $\vec{b}_i^* = \vec{u}_i$ (quand $0 \notin \mathcal{A}$), soit l'opposé d'une telle somme; celà se traduit par $\chi_b = 1$ et implique

$$\bar{\sigma}(A_n^*) = \bar{\phi}(A_n^*) = \bar{\chi}(A_n^*) = \sigma(A_n^*) = \phi(A_n^*) = \chi(A_n^*) = \rho(A_n^*) = 1. \qquad 4(13)$$

Puisque A_n est un sous réseau de A_n^* nous avons un homomorphisme de groupes abéliens:

$$A_n^* \xrightarrow{\theta} A_n^*/A_n \sim Z_{n+1}. \qquad 4(14)$$

Les sous-groupes de Z_{n+1} sont les Z_k, k diviseur de $n+1$. Les pré-images de ces sous-groupes sont des sous réseaux de A_n^* ayant même symétrie group $\bar{A}_n$. La notation usuelle de ces *réseaux intermédiaires* est ($\vec{w}_\ell$ est un vecteur de W_ℓ):

$$1 < k, \ell < n+1,\ k\ell = n+1, \quad A_n^{(k)} = A_n \cup_{m=1}^{k-1} A_n + m\ell\vec{w}_\ell; \quad (A_n^{(k)})^* = A_n^{(\ell)}. \qquad 4(15)$$

Les groupes de Bravais correspondants sont maximaux et non conjugués dans $GL_n(Z)$ (et conjugués dans $GL_n(Q)$ et, a fortiori, dans $GL_n(R)$). Nous avons calculé les invariants de $A_n^{(\ell)}$; nous publierons ce calcul plus tard.

Les réseaux D_n et D_n^*.
Nous posons $n > 4$ (pour $n < 4$ ces réseaux sont identiques à certains déjà étudiés). Dans l'espace E_n avec la base orthonormale $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$, les racines de D_n sont (en notant $\pm 1 = \varepsilon_i$):

$$1 \leq i, j \leq n : \ R = \{\varepsilon_i\vec{e}_i + \varepsilon_j\vec{e}_j\}, \quad |R| = 2n(n+1); \quad R = S = F; \qquad 4(16)$$

Le groupe de symétrie est $O_n(Z) = B_n$. Les w-vecteurs de D_n^* forment deux B_n-orbites:

$$W = W_1 \cup W_n, \quad W_1 = \{\pm\vec{e}_i\},\ |W_1| = 2n, \quad W_n = \{\frac{1}{2}(\sum_i \varepsilon_i\vec{e}_i)\}; \quad |W_n| = 2^n. \qquad 4(17)$$

Nous définissons une base $\subset R$ dont la duale est $\subset W_n$:

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_n, \; i \geq 2, \; \vec{b}_i = \vec{e}_{i-1} - \vec{e}_i; \quad \vec{b}_1^* = \vec{w} = \frac{1}{2}\sum_i \vec{e}_i, \; i \geq 2, \; \vec{b}_i^* = \vec{w} - \sum_{k=i}^{n} \vec{e}_k. \quad 4(18)$$

On a $r_b = 1$ donc $\rho = 1$. Puisque la base est dans F qui est une orbite de B_n, $\phi = 1$. Nous notons C_m la B_n-orbite de vecteurs de D_n qui onte, dans la base $\{\vec{e}_i\}$, $2m$ cordonnées ± 1, les autres étant nulles. L'équation 1(11) montre que la décomposition de $C(D_n)$ en B_n-orbites est:

$$C(D_n) = 2W_1 \cup_{m=1}^{[n/2]} C_m. \quad 4(19)$$

Le produit scalaire d'orbites des C_m avec W_1 est 1 et avec $F = C_1$ est 2. A cause de la présence de l'orbite W_1 dans (16) on en déduit $\bar{\chi}(D_n) = 2$. Puisque $D_n^* = I_n \cup I_n + \vec{w}$, *vecw* $\in W_n$, nous obtenons $\chi(D_n) = [n/2]$. Avec les inégalités 0(2), nous avons obtenu:

$$n > 4, \; \bar{\sigma}(D_n) = \bar{\phi}(D_n) = \sigma(D_n) = \phi(D_n) = \rho(D_n) = 1, \quad \bar{\chi}(D_n) = 2, \; \chi(D_n) = [\frac{n}{2}]. \quad 4(20)$$

De §1 nous déduisons pour D_n^*, $n > 4$, $S = W_1$, $F = S \cup W_n$ et $(F \cup R) \subset C$. Dans la base $\{\vec{b}_i^*\}$ nous calculons: $\vec{e}_1 = \vec{b}_1^* + \vec{b}_2^*$, $\vec{e}_i = \vec{b}_{i+1}^* - \vec{b}_i^*$, $\vec{e}_n = \vec{b}_1^* - \vec{b}_n^*$; nous en déduisons $\sigma(D_n^*) = 1$. Puisque la base est dans l'orbite W_n, de $\rho = 1$ nous en déduisons que les coordonnées des vecteurs de W_n sont $\pm 1, 0$. Nous en déduisons:

$$n > 4, \; \bar{\sigma}(D_n^*) = \bar{\phi}(D_n^*) = \sigma(D_n^*) = \phi(D_n^*) = \rho(D_n^*) = 1. \quad 4(21)$$

Nous avions réservé le cas $n = 4$. Dans D_4^*, les vecteurs de W_1 et W_4 ont tous norme 1 et ces deux orbites de B_4 forment une seule orbite de F_4, le groupe d'automorphisme du réseau; B_4 en est sous-groupe d'index 3. En utilisant la proposition 3 on montre que $L_4(D_4)$ contient 3 croix de 8 vecteurs et puisque $3 + \frac{1}{2}|R| = 15 = 2^4 - 1$ il n'y a pas d'autres vecteurs de couronne. L'existence de l'équivalence (définie en 0(1)) $D_4^* \sim (1/\sqrt{2})D_4$ est bien connue; ce réseau est aussi dénoté par F_4. La base $\{b_i^*\}$ définie en (18) est encore valide; donc nous avons encore $\rho = 1$ et nous avons aussi:

$$\bar{\sigma}(F_4) = \bar{\phi}(F_4) = \bar{\chi}(F_4) = \sigma(F_4) = \phi(F_4) = \chi(F_4) = \rho(F_4) = 1. \quad 4(22)$$

Quand $n > 4$ est pair il existe deux réseaux intermédiaires $D_n^{\pm}$ engendrés par $R \cup W_n^{\pm}$ où $W_n^{\pm}$ est l'ensemble des vecteurs de W_n avec un nombre pair pour +, impair pour - de coordonnées de même signe. Chaque réseau n'est invariant que par le groupe D_n, sous-groupe d'index 2 de B_n; ils sont transformés l'un dans l'autre par tout élément diagonal de B_n (non dans D_n) de déterminant -1. Pour $n \equiv 2 \bmod 4$ ils sont isoduaux, $n \equiv 0 \bmod 4$ ils sont self-duaux, et pairs quand $n \equiv 0 \bmod 8$. Nous calculons leurs invariants plus loin.

Les réseaux E_8, E_7, E_7^*, E_6, E_6^*.

Les équivalences $A_8^{(3)} \sim D_8^+ \sim E_8$ sont bien connues. Le groupe de symétrie est plus grand que D_8 parce que les vecteurs de R et de W_8 ont la même norme 2. Ils forment une seule orbite du groupe E_8; cette orbite est $L_2 = S(E_8) = F(E_8)$. On peut appliquer la table

1a pour ce réseau self-dual pair; dans ce cas exceptionel chaque entrée est une seule orbite du groupe E_8; avec 1(11) on obtient encore $C(E_8) = L_2 \cup L_4$. Pour E_8 toutes les bornes supérieures des produits scalaires de la table 1a sont atteintes; puisque elles sont toutes ≥ 2, par la remarque en italique qui suit 3(2), nous savons donc que les sept invariants sont ≥ 2 (donc E_8 n'a pas de $\vec{w}$-vecteurs!). Il existe une base de E_8 dans $L_2 = S = F$ dont la base duale est aussi dans L_2 [ENG86]. La valeur des produits scalaires d'orbites de L_2 avec L_2 et L_4 est 2; cela implique:

$$\bar{\sigma}(E_8) = \bar{\phi}(E_8) = \bar{\chi}(E_8) = \sigma(E_8) = \phi(E_8) = \chi(E_8) = \rho(E_8) = 2. \qquad 4(23)$$

Tout sous-réseau de E_8 dans un sous-espace orthogonal à un vecteur $\vec{r} \in R = S = F$ est isomorphe à un réseau E_7. En prenant $\vec{r} = \vec{w}_8 = \sum_i \vec{e}_i$ on montre $E_7 = A_7^{(2)}$ et par conséquent $E_7^* = A_7^{(4)}$. Comme le montre la dernière égalité de (11), les vecteurs des deux A_7-orbites, R et W_4, ont norme 2; elles forment une seule E_7-orbite: $R(E_7) = S(E_7) = F(E_7)$, et, en utilisant (3),(11'), $|R(E_7)| = 126$. Les $\vec{w}$-vecteurs dans E_7^* forment une $\bar{A}_n$-orbite (qui est aussi une E_7-orbite): $W = W_2 \cup W_6$ dont les vecteurs ont norme 3/2 (see (9)) et $|W| = 56$. La proposition 3 implique $F(E_7^*) = R \cup W$. Il existe une base de E_7 dans R dont la base duale est dans W; c'est la situation rencontrée pour tous les réseaux simples de racines, E_8 excepté. Donc:

$$\bar{\sigma}(E_7) = \bar{\phi}(E_7) = \sigma(E_7) = \phi(E_7) = \rho(E_7) = 1. \qquad 4(24)$$

Pour E_7^*, $F(E_7^*) = R \cup W$ est une nouvelle situation. Puisque $S(E_7^*) = W$ and $\rho(E_7^*) = \rho(E_7) = 1$, on a dans cette base $\sigma(E_7^*) = 1$. Parcontre dans cette base $\phi_b = 2$. La valeur de $\bar{\phi}_b$ ne peut pas être plus petite parce que $F(E_7) = R$ forme une seule orbite. Nous avons donc démontré:

$$\bar{\sigma}(E_7^*) = \sigma(E_7^*) = \rho(E_7^*) = 1, \ \bar{\phi}(E_7^*) = \phi(E_7^*) = 2. \qquad 4(25)$$

Proposition 4 donne une interprétation géométrique de cette valeur 2. Les cas de E_6 et E_6^* sont similaires; R et W sont des orbites:

$$L_2 = R = S(E_6) = F(E_6), \ |R| = 72, \quad |W| = 54, \ N(W_\ell) = \frac{4}{3} \Rightarrow F(E_6^*) = R \cup W. \quad 4(26)$$

Donc les invariants calculés pour E_7 ont même valeur pour E_6:

$$\bar{\sigma}(E_6) = \bar{\phi}(E_6) = \sigma(E_6) = \phi(E_6) = \rho(E_6) = 1. \qquad 4(27)$$

Nous notons que $|F(E_6^*)| = 126 = 2(2^6 - 1)$, ce qui montre que $F(E_6^*) = C(E_6^*)$. D'où la valeur de tous les invariants de E_6^*:

$$\bar{\sigma}(E_6^*) = \sigma(E_6^*) = \rho(E_6^*) = 1; \ \bar{\phi}(E_6^*) = \bar{\chi}(E_6^*) = \phi(E_6^*) = \chi(E_6^*) = 2 \qquad 4(28)$$

Le réseau de Leech.
Il est souvent noté Λ_{24}. En dimension 24 c'est l'unique réseau self-dual pair dont les

vecteurs S ont norme 4. La table 1b est valable pour lui avec la propriété que chaque entrée L_a indiquée est un unique orbite de son groupe d'automorphisme (cf [CONSL]. De la proposition 3 on déduit $F = L_4 \cup L_6$, et avec 1(11), $C = F \cup L_8$. Dans la table 1b, la plus plus petite valeur des produits scalaires d'orbites est 3; de la remarque en italique après 3(2) on déduit que c'est aussi la valeur minimum des invariants. Cette valeur 3 est celle de $\bar{\sigma}$ en prenant pour $\vec{\ell}^*$ dans 2(7) un vecteur de L_6. On ne sait pas s'il est possible d'avoir une paire de bases duales, l'une dans L_4, l'autre dans L_6; si la réponse est affirmative $\sigma = \rho = 3$. Nebe a construit une base dans S dont la duale est encore dans S. Cela implique:

$$\bar{\sigma}(\Lambda_{24}) = 3,\ 3 \leq \sigma(\Lambda_{24}) = \rho(\Lambda_{24}) \leq 4,\ \bar{\phi}(\Lambda_{24}) = \bar{\chi}(\Lambda_{24}) = \phi(\Lambda_{24}) = \chi(\Lambda_{24}) = 4. \qquad 4(29)$$

Les réseaux D_n^+, n pair.
Nous avons vu que n pair, $D_n^+ = D_n \cup X_+$, avec $X_+ = D_n + \vec{w}_+$, $\vec{w}_+ \in W_n^+$. Toute base doit avoir un vecteur dans X_+. Si $n \equiv 0 \bmod 4$, D_n^+ est self-dual. Ayant déjà étudié les cas $n = 4$ (I_4) et $n = 8$ (E_8), nous posons $n \geq 12$. Il est aisé de montrer que le plus petit produit scalaire de deux D_n orbites dans X_+ est $n/4$. Cela implique $\rho \geq n/4$. On peut trouver une base qui, ainsi que sa duale, est dans $F(D_n) \cup W_n^+ = F(D_n^+)$. Cela minimise ρ. Dans 2(7), suivant qu'on choisit $\ell^* \in F(D_n)$ or W_n^+ on a $\bar{\sigma} = 2$, $\bar{\phi} = 2$, et $\bar{\sigma} = 1$, $\bar{\phi} = n/4$, respectivement. On voit que les vecteurs pour minimiser $\bar{\sigma}$ ou $\bar{\phi}$ sont différents. Finalement

$$\bar{\sigma}(D_n^+) = 1,\ \bar{\phi}(D_n^+) = \sigma(D_n^+) = 2,\ \phi(D_n^+) = \rho(D_n^+) = [\frac{n}{4}]. \qquad 4(30)$$

§ **5.** *Conclusion*

Pour chaque dimension n nous notons par ρ_n la valeur maximale de ρ' sur $\{CA\}_n$ ou, ce qui est equivalent, sur $\mathcal{F}_n$. C'est aussi la valeur maximale de ρ sur $\{CB\}_n$. Les $\mathcal{F}_n$ sont connus pour $n \leq 5$; ils ont respectivement 1,2,4,9,17 elements (voir [DAD65] pour $n = 4$, [RYŠ72] pour $n = 5$). Il est bien connu par les cristallographes que $\rho_n = 1$ pour $n \leq 3$. Nous avons obtenu des bases donnant $\rho_4 = 1 = \rho_5$ pour les 9+17 groupes de Bravais maximaux correspondants. Pour $6 \leq n \leq 9$, Plesken et Pohst [PLEPO] ont donné la liste des classes de Bravais irréductibles, maximales; we have calculated their ρ et d'autres invariants. A partir de [PLEPO], pour les mêmes dimensions il est facile de construire toutes les classes de Bravais maximales et completement réductibles sur Z en une somme directe de classes irréductibles; on obtient facilement la valeur de ρ pour elles. Mais ne sachant rien sur l'existence de classes arithmetiques maximales, réductibles et indécomposables sur Z nous ne pouvons donner qu'une borne sur la valeur de ρ_n:

$$n \leq 5,\ \rho_n = 1; \quad 6 \leq n,\ \rho_n \geq [\frac{n}{4}]. \qquad 5(1)$$

Les sept invariants présentés donnent des informations sur des propriétés géométriques des réseaux et leur symétrie arithmétique; nous les avons trouvées assez curieuses pour nous y intéresser. Le concept de base optimale peut avoir de l'intérêt, mais nous ne le savons pas encore.

§ 6. *Références.*

CONSL Conway J.H., Sloane N.J.A., Sphere Packings, Lattices and groups. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290), Springer-Verlag, 1988.

DAD65 Dade E.C. The maximal finite groups of 4×4 integral matrices. Illinois J. Math. 9 (1965) 99–122.

ENG86 Engel P.,

JOR880 Jordan C., Mémoire sur l'équivalence des formes, *J. Ecole Polytech.* **48** (1880) 112-150.

MIN897 Minkowski H., Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1897) [Ges. Abhand. **2** 103–121.]

MIN07 Minkowski H., *Diophantische Approximationen*, Teubner, Lepzig (1907); reprinted by Chelsea, New-York (1957).

PLEPO Plesken W., Pohst M. On maximal finite irreducible subgroups of $GL(n, Z)$. Math. Comp. 31 (1977) I. 536–551. II. 552–573. 34 (1980) III. 245–258. IV. 259–275. V. 277–301.

RYŠ72 Ryškov S.S., On maximal finite groups of integer $n \times n$ matrices. Soviet Math. Dokl. 13 (1972) 720–723.

VOR08 Voronoï G., Recherches sur les paralléloèdres primitifs. I. Propriétés générales des paralléloèdres. *Crelle = J. reine angew. Math.* **133** (1908) 198-287. II. Domaines de formes quadratiques correspondant aux différents types de paralléloèdres primitifs. *Crelle = J. reine angew. Math.* **136** (1909) 67-181.

Adresses des auteurs: P. Engel, Laboratorium für Kristallographie, Universität Bern, Freierstrasse 3, CH-3012 Berne, Suisse, engel@krist.unibe.ch

L. Michel, I.H.É.S., F-91440 Bures-sur-Yvette, France, michel@ihes.fr

M. Senechal, Dpt of Mathematics, Smith College, Northampton, MA 01063, USA, senechal@math.smith.edu